Technische Universiteit Delft, Fac. EWI

Tentamen Differentiaalvergelijkingen, wi2034TA, 22 januari 2014, 14:00-17.00 uur

---

Elk antwoord dient te worden beargumenteerd. Het gebruik van een boek en/of telefoon is **niet** toegestaan. Een Laplacetabel (met extra's) wordt bijgeleverd.
Puntenverdeling: opg.1: 7 pt; opg.2: 8 pt; opg.3: 4 pt; opg.4: 6 pt; opg.5: 7 pt;

---

1. **a.** Bereken *met behulp van de Laplace-getransformeerde* de oplossing van het beginwaardenprobleem

$$\begin{cases} y' + y = g(t) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{2}t, & \text{als } 0 \leq t \leq 4 \\ 0\ , & \text{als } t \geq 4 \end{cases} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Aanwijzing: schrijf eerst g in de vorm $g(t) = g_1(t) + g_2(t-4)u_4(t)$.

b. Bereken de inverse Laplace-getransformeerde van de functie

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+4)^2}.$$

(Aanwijzing: formule 15 of 16 gebruiken, maar *zeker niet* breuksplitsen.)

2. Beschouw het stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$, met

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} -2te^{-3t} \\ -2te^{-3t} \end{bmatrix}$$

Gegeven is dat het homogene stelsel $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ de oplossingen
$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$ en $\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 3+16t \\ -1+16t \end{bmatrix} e^{-3t}$ heeft.

a. Leid hieruit (dus *niet* door het karakteristieke polynoom te berekenen!) af wat de eigenwaarden en eigenvectoren van A zijn.

b. Bereken de oplossing van het homogene stelsel die voor $t = 0$ door het punt $(0, 4)$ gaat.

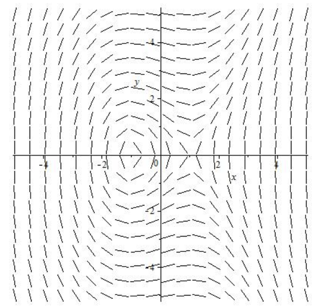
c. Classificeer het rustpunt (0,0) en geef een schets van een aantal oplossingen in het fasevlak. Licht in woorden de rol van de eigenvector(en) toe.

d. Bereken met behulp van variatie van constanten een particuliere oplossing van het niet-homogene stelsel.

Z.O.Z. voor opgaven 3, 4, 5.

3. Het niet lineaire stelsel $\begin{cases} x' = & y \\ y' = & -x - \sigma^2(4 - x^2)y \end{cases}$ waarin $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$ heeft (0,0) als enige stationaire punt. Geef voor elke waarde van de parameter σ de aard van dit stationaire punt.

4. In deze opgave bekijken we het niet-lineaire stelsel $\begin{cases} x' & = & xy \\ y' & = & x^3 - x. \end{cases}$
(Het diagram geeft het richtingsveld.)



a. Alle punten op de y-as zijn rustpunten. Zal een oplossing die start in een punt $(\varepsilon, 2)$, waarbij ε een klein positief getal is, naderen tot de y-as of er juist van weglopen? (Argument!?)

b. De oplossingskrommen (uitgezonderd $x = 0$) voldoen aan de DV

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{x^3 - x}{xy} = \frac{x^2 - 1}{y}.$$

Bereken de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking alsook de oplossingskromme die gaat door het punt $(3, -4)$.
Schrijf deze oplossing in de expliciete vorm $y = g(x)$.

c. In welke richting (naar links, naar rechts?) gaat oplossing $(x(t), y(t))$ die start in het punt $(3, -4)$?
Wat gebeurt er als $t \to \infty$: loopt de oplossing weg naar oneindig, of nadert de oplossing tot een (rust)punt? (In het laatste geval: *welk* rustpunt?)

5. **a.** Bereken via de methode van het scheiden van variabelen (geen kant en klare formules!) de oplossing van de volgende warmtevergelijking met begin- en randvoorwaarden:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{16}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{(I)} \\ u(0,t) = u(2\pi, t) = 0 & \text{(II)} \\ u(x,0) = h(x) & \text{(III)} \end{cases} \quad \text{waarbij} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0 \leq t \end{cases}$$

b. Geef de oplossing als $h(x) = \sin 3x + 3\sin x$.