Technische Universiteit Delft, Fac. EWI

Tentamen Differentiaalvergelijkingen, wi2034TA, 7 november 2014, 14:00-17.00 uur

---

Elk antwoord dient te worden beargumenteerd. Het gebruik van een boek en/of telefoon is **niet** toegestaan. Een Laplacetabel (met extra's) wordt bijgeleverd. U mag ook gebruik maken van een simpele rekenmachine (geen grafische mogelijkheden, geen tekstinvoer).
De punten: opg.1: **6** pt; opg.2: **10** pt; opg.3: **3** pt; opg.4: **9** pt; opg.5: **8** pt.

---

1. **a.** Bereken de Laplace-getransformeerde van de functie $\begin{cases} t, & \text{als } 0 \leq t \leq 2 \\ 2\ , & \text{als } t \geq 2 \end{cases}$

b. Bereken *met behulp van de Laplace-getransformeerde* de oplossing van het beginwaardenprobleem $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = t^2e^{-2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

2. Gegeven is dat het (homogene) stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

de oplossingen $\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$ en $\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 3+16t \\ -1+16t \end{bmatrix} e^{-3t}$ heeft.

a. Leid hieruit (dus *niet* door het karakteristieke polynoom te berekenen!) af wat de eigenwaarden en eigenvectoren van A zijn.

b. Bereken de oplossing van het homogene stelsel die voor $t = 0$ door het punt $(6, 2)$ gaat. Geef <u>expliciet</u> de twee componentfuncties $x(t)$ en $y(t)$ van $\mathbf{x}(t)$.

c. Classificeer het rustpunt (0,0) en geef een schets van een aantal oplossingen in het fasevlak.
Wat is het gedrag van de oplossingen $\mathbf{x}(t)$ voor $t \to \pm\infty$? Licht in woorden de rol van de eigenvector(en) toe.

Beschouw nu het stelsel $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -2te^{-3t} \\ -2te^{-3t} \end{bmatrix}$.

d. Bereken met behulp van variatie van constanten een particuliere oplossing van dit (niet-homogene) stelsel.

3. De functie $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $f(x) = x$, voor $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 1$, voor $1 \leq x \leq 3$, en $f(x) = 4 - x$, voor $3 \leq x \leq 4$.
(Maak een schets en merk op dat f continu is.)
Bereken het begin van de Fourierreeks van de periodieke voortzetting van f met periode 4 tot en met de eerste vier termen ongelijk aan 0.
(Aanwijzing: je kunt 'gewoon' partieel integreren in het geval van een *continue* functie die slechts in enkele punten niet differentieerbaar is.)

4. In een afgesloten natuurgebied leven twee diersoorten met (geschaalde) aantallen $x(t)$ en $y(t)$. Het verband tussen $x(t)$ en $y(t)$ (met t in jaren) is

$$\frac{dx}{dt} = 0.5x\,(6 - x - 2y), \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = 0.25y\,(8 - 2x - 2y)$$

a. Is dit een rover-prooimodel, of een competitief model ('competing species')? Geef in het eerste geval aan welk van de twee variabelen de populatiegrootte van de rovers voorstelt. (En ook: waarom.)

b. Toon via het richtingsveld aan dat oplossingen die starten vanuit een punt binnen het vierkant $0 \leq x \leq 10,\ 0 \leq y \leq 10$ het vierkant niet kunnen verlaten.

c. Bereken de vier evenwichtspunten. (Aanwijzing voor uw gemak: $(2, 2)$ is er een van.)

d. Bepaal het lokale gedrag rond de evenwichtspunten, en classificeer ze (knoop, zadelpunt, enz., stabiel/instabiel).
Schets op grond hiervan de oplossingskrommen in het fasevlak.

e. Beschrijf wat er na verloop van tijd met de populaties gebeurt. Geef grofweg aan hoe dat van de beginpopulaties afhangt.

5. **a.** Bereken via de methode van het scheiden van variabelen (geen kant en klare formules!) de oplossing van de volgende golfvergelijking met begin- en randvoorwaarden:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{(I)} \\ u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0 & \text{(II)} \\ u(x,0) = h(x) & \text{(III-a)} \\ u_t(x,0) = 0 & \text{(III-b)} \end{cases}$$

voor $0 \leq x \leq 4$, en $t \geq 0$.

b. Geef oplossingen $u(x,t) = X(t)T(t)$ van de PDV $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ die voldoen aan de 'gemengde' randwaarden $u_x(0,t) = 0,\ u(4,t) = 0$.

Uitwerkingen

1a Eerst $g(t)$ in de gewenste vorm schrijven:
$g(t) = t \cdot (1 - u_2(t)) + 2u_2(t) = t - (t-2)u_2(t).$
L-transformeren geeft $\quad G(s) = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{e^{-2s}}{s^2}.$

1b Laplace transformeren (waarbij opgemerkt dat $s^2 + 4s + 4 = (s+2)^2$):

$$s^2Y(s) - 0s - 2 + 4(sY(s) - 0) + 4Y(s) = \frac{2}{(s+2)^3} \;\Leftrightarrow\; Y(s) = \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{2}{(s+2)^5}.$$

Terugtransformeren (waarbij opgemerkt dat $\mathcal{L}^{-1}\left[1/s^5\right] = t^4/4! = \frac{1}{24}t^4$):

$$y(t) = 2te^{-2t} + \tfrac{2}{24}t^3e^{-2t} = 2te^{-2t} + \tfrac{1}{12}t^4e^{-2t}.$$

2a Uit de oplossing $\mathbf{x}_1(t)$ volgt dat A de eigenvector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ heeft bij de e.w. $\lambda = -3$.

Uit de tweede homogene oplossing volgt dat -3 een dubbele eigenwaarde is (en $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ een gegeneraliseerde eigenvector, maar dat hoef je niet te weten).

2b Daarvoor moeten c_1, c_2 berekend worden zodat

$$c_1\mathbf{x}_1(0) + c_2\mathbf{x}_2(0) = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dat geeft vrij gemakkelijk $c_1 = 3$, $c_2 = 1$, en dus het **antwoord** $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 6e^{-3t} + 16t\,e^{-3t} \\ y(t) & = & 2e^{-3t} + 16t\,e^{-3t} \end{array}\right.$.

2c Vanwege de dubbele negatieve eigenwaarde: (0,0) is een stabiele oneigenlijke knoop. Oplossingskrommen 'komen' (voor $t = -\infty$) vanuit de richting $\pm\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en buigen af om in de tegengestelde richting , dus langs $\mp\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 'naar de oorsprong' te lopen.
Als je de richting bekijkt in bijv. het punt (0,1): $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix}$, dan zie je dat oplossingen boven de lijn $y = x$ van rechtsboven komen en linksom afbuigen om vanuit het derde kwadrant naar (0,0) te lopen.
(Voor een illustratie: zie B&dP § 7.8.)

2d Via de fundamentaalmatrix $\quad F(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3+16t \\ 1 & -1+16t \end{bmatrix} e^{-3t}$

met determinant $\quad 1 \cdot (-1+16t) - 1 \cdot (3+16t) \cdot (e^{-3t})^2 = -4\,e^{-6t}$

en inverse $\quad \dfrac{1}{-4e^{-6t}}\begin{bmatrix} -1+16t & -(3+16t) \\ -1 & 1 \end{bmatrix} e^{-3t} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1-16t & 3+16t \\ 1 & -1 \end{bmatrix} e^{3t}$

vinden we door (geheel standaard) te stellen $\quad \mathbf{x}(t)_p = F(t)\mathbf{u}(t)$
dat $\mathbf{u}(t)$ moet voldoen aan $\quad F(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t)$, oftewel (weer geheel standaard)

$$\mathbf{u}'(t) = F^{-1}(t)\mathbf{g}(t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1-16t & 3+16t \\ 1 & -1 \end{bmatrix} e^{3t}\begin{bmatrix} -2t \\ -2t \end{bmatrix} e^{-3t} = \begin{bmatrix} -2t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Komt dat even mooi uit! ;-) Daaruit volgt

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} -t^2 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \mathbf{x}_p(t) = F(t)\mathbf{u}(t) = \ldots = \begin{bmatrix} -t^2 e^{-3t} \\ -t^2 e^{-3t} \end{bmatrix}$$

3 Merk op: als je een $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ even en periodiek voortzet krijg je in het algemeen een functie van periode $2L$, maar door de 'symmetrie' van deze functie wordt de periode 4. De formules:

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\tfrac{n\pi}{L}x\right), \quad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\tfrac{n\pi}{L}x\right)\,dx, \; n \geq 1$$

Hier: $a_0 = \frac{1}{4} \cdot (\text{oppervlakte onder } f) = \frac{3}{4}$, en voor $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\cos\left(\tfrac{n\pi}{4}x\right)\,dx = \ldots (\text{P.I.}) \ldots \\ &= \frac{2}{4}\left[f(x)\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)}{\frac{n\pi}{4}}\right]_0^4 - \frac{2}{4}\int_0^4 f'(x)\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)}{\frac{n\pi}{4}}\,dx \\ &= 0 - \frac{2}{n\pi}\int_0^4 f'(x)\sin\left(\tfrac{n\pi}{4}x\right)\,dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin\left(\tfrac{n\pi}{4}x\right)\,dx + \frac{2}{n\pi}\int_3^4 \sin\left(\tfrac{n\pi}{4}x\right)\,dx, \end{aligned}$$

want $f'(x) = 1$ voor $0 < x < 1$, $f'(x) = 0$ voor $1 < x < 3$, en $f'(x) = -1$ voor $3 < x < 4$. Doorrekenen geeft

$$a_n = \frac{8}{n^2\pi^2}\left[\cos(\tfrac{n\pi}{4}x)\right]_0^1 - \frac{8}{n^2\pi^2}\left[\cos(\tfrac{n\pi}{4}x)\right]_3^4 = \frac{8}{n^2\pi^2}\left(\cos(\tfrac{1}{4}n\pi) - \cos 0 - \cos(n\pi) + \cos(\tfrac{3}{4}n\pi)\right)$$

Dan nog 'even' de coëfficiënten:

n	$\cos(\frac{1}{4}n\pi)$	$\cos(\frac{3}{4}n\pi)$	$-1-\cos(n\pi)$	a_n
1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	0
2	0	0	-2	$-\frac{4}{\pi^2}$
3	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	0
4	-1	-1	-2	$-\frac{2}{\pi^2}$
5	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	0
6	0	0	-2	$-\frac{4}{9\pi^2}$
7	$+\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	0
8	1	1	-2	0
9	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	0
10	0	0	-2	$-\frac{4}{25\pi^2}$

dus het begin van de Fourierreeks

$$\frac{3}{4} - \frac{4\cos(\frac{2}{4}\pi x)}{\pi^2} - \frac{2\cos(\pi x)}{\pi^2} - \frac{4\cos(\frac{6}{4}\pi x)}{9\pi^2} - \frac{4\cos(\frac{10}{4}\pi x)}{25\pi^2}$$

Oh, maar dat zijn eigenlijk al vijf termen ongelijk aan nul!

4a De wisselwerking blijkt uit de coëfficënten van de termen xy. Deze zijn beide negatief, dus er is sprake van wederzijdse concurrentie.

4b Kijk naar het richtingsveld op de rand, die uit vier delen bestaat:
Voor $y = 10,\ 0 < x < 10$ geldt $y'(t) < 0$, dus een oplossing zal in de negatieve y-richting bewegen. Net zo voor $x = 10, 0 < y < 10$, $y = 0$, enz.

4c Op te lossen: $\begin{cases} 0.5x\,(6 - x - 2y) \\ 0.25y\,(8 - 2x - 2y) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{of} \quad 6 - x - 2y = 0 \\ y = 0 \quad \text{of} \quad 8 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$

Deze vier (!) mogelijkheden combineren geeft eenvoudig de drie punten $(0,0)$, $(0,4)$ en $(6,0)$, en uit $\begin{cases} 6 - x - 2y = 0 \\ 8 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$ volgt het vierde punt $(2\,2)$.

4d $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0.5x\,(6 - x - 2y) \\ \frac{dy}{dt} = 0.25y\,(8 - 2x - 2y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 0.5x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 0.5xy - 0.5y^2 \end{cases}$

Voor de linearisering is nodig de Jacobiaan $J(x,y) = \begin{bmatrix} 3 - x - y & -x \\ -0.5y & 2 - 0.5x - y \end{bmatrix}$.

$J(0,0) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden 3 en 2, dus is een **instabiele knoop**.

$J(6,0) = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden -3 en -1, dus is een **(asymptotisch) stabiele knoop**.

$J(0,4) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden -2 en -1, dus is ook een **stabiele knoop**.

$J(2,2) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ vraagt iets meer werk.

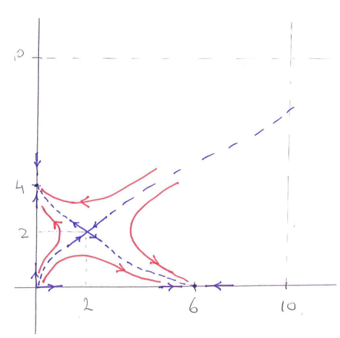
Het karakteristieke polynoom: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 - 2$ geeft de eigenwaarden $-1 - \sqrt{2} < 0$ en $-1 + \sqrt{2} > 0$, dus dat wordt een **zadelpunt**.

Voor een schets is het handig om ook de bijbehorende eigenvectoren berekenen:

$$\begin{bmatrix} -1 - (-1 - \sqrt{2}) & -2 \\ -1 & -1 - (-1 - \sqrt{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e.v.} \quad \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Net zo geeft $\lambda = -1 + \sqrt{2}$

de e.v. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1 \end{bmatrix}$.



- - - - - : "speculatief"

4e Een beginverdeling in de buurt van punt (0,4) zal leiden naar het punt (0,4) (populatie I sterft uit), en analoog bij het andere stabiele evenwichtspunt (6,0).
Theoretisch is er een oplossingskromme van (0,0) naar (2,2) en van 'oneindig' naar (2,2) (de gestippelde kromme die ergens de lijn $x = 10$ of $y = 10$ zal snijden). Deze twee krommen samen bepalen een scheidskromme tussen de aantrekkingsgebieden van (0,4) en (6,0).

5a Het gebruikelijke rataplan:
stel $u(x,t) = X(x)T(t)$, vervolgens: scheid variabelen, dat geeft

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = 16\frac{X''(x)}{X(x)} = \text{constant}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = C \\ X'(0) = 0, \quad X'(4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \text{ voor } C = -\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 : \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{4}x\right)$$

Voor de genoemde C:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = 16C = -(n\pi)^2 \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad T_n(t) = A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)$$

All in all

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)\Big] \cos\left(\frac{n\pi}{4}x\right)$$

$u(x,0) = h(x)$ geeft $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{4}x\right)$,
dus de A_n zijn de coëfficiënten van de cosinusreeks van $h(x)$.

Uitgeschreven: $A_0 = \frac{1}{4}\displaystyle\int_0^4 h(x)\,dx$, en $A_n = \frac{2}{4}\displaystyle\int_0^4 h(x)\cos\left(\frac{n\pi}{4}x\right)dx$, voor $n \geq 1$.

Ten slotte: $u_t(x,0) = 0$ geeft $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n n\pi \cos\left(\frac{n\pi}{4}x\right) = 0$, waaruit volgt dat $B_n = 0$.
(Dit laatste had ook direct bij het oplossen van $T''(t)/T(t) = 16C$ opgemerkt kunnen worden.)

5b Scheiden van variabelen geeft nu voor het deel $X(x)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = C \\ X'(0) = 0, \quad X(4) = 0 \end{array}\right.$$

Opnieuw: voor positieve C, zeg $C = a^2$: $X(x) = Ae^{ax} + Be^{-ax}$, en aan de randvoorwaarden is voldaan als $aA - aB = 0$, en $Ae^{4a} + Be^{-4a} = 0$. Dit geeft $A = B = 0$.
Net zo geeft $C = 0$ slechts de triviale oplossing.
Blijft over $C = -\sigma^2$. Dat geeft oplossingen $X(x) = A\sin(\sigma x) + B\cos(\sigma x)$.
$X'(0) = 0 \to A = 0$; en $X(4) = 0$ geeft dan $B\cos(4\sigma) = 0$.

Dit geeft niet-triviale oplossingen voor $4\sigma = \frac{1}{2}\pi + n\pi$, oftewel $\sigma = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{4} = \dfrac{(2n+1)\pi}{8}$.

De bijbehorende C: $-\left(\dfrac{(2n+1)\pi}{8}\right)^2$, en de bijbehorende T: $T(t) = A\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{8}t\right) + B\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{8}t\right)$.

De gevraagde oplossingen: $u_n(x,t) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{8}x\right) \cdot \left(A_n \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{8}t\right) + B_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{8}t\right)\right]$.