Technische Universiteit Delft, Fac. EWI

Tentamen Differentiaalvergelijkingen, wi2034TA, 9 november 2012, 14:00-17.00 uur

---

Elk antwoord dient te worden beargumenteerd. Het gebruik van een boek en/of telefoon is **niet** toegestaan. Een Laplacetabel (met extra's) wordt bijgeleverd.

---

1. **a.** Bereken de Laplace-getransformeerde van de functie

$$g(t) = \begin{cases} t\ , & \text{als } 0 \leq t \leq \pi \\ 2\pi - t, & \text{als } \pi \leq t \leq 2\pi \\ 0\ , & \text{anders} \end{cases}$$

b. Bereken de oplossing van het 'algemene' beginwaardeprobleem

$$y''(t) + 4y(t) = h(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

(Het antwoord zal een convolutie-integraal bevatten.)

c. Wat wordt het eindantwoord (zonder convolutie-integraal) als $h(t) = 4t$?

2. **a.** Bereken de algemene oplossing van het stelsel $\begin{cases} x_1' &= \quad x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$

b. Classificeer het rustpunt (0,0) en geef een schets van een aantal oplossingen in het fasevlak.

c. Bereken de oplossing die voor $t = 0$ door het punt (1,4) gaat.

d. Bereken met de methode van variatie van constanten een ('particuliere') oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x_1'(t) = \quad x_1(t) + 2x_2(t) + (-2t + 2)e^{-t} \\ x_2'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) + \ (2t + 2)e^{-t} \end{cases}$$

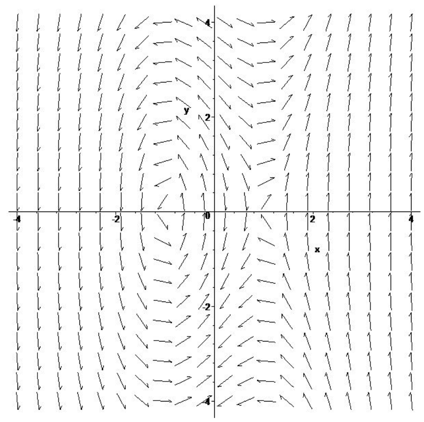
3. Stel $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = \begin{cases} x, & \text{als } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{als } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

Bereken de coëfficiënten van de cosinusreeks $s(x)$ van de voortzetting van $f(x)$ die even is en periodiek met periode 4. Schrijf $s(x)$ uit tot en met de vijfde term ongelijk aan nul.

4. Beschouw het autonome stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = xy \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = 3x^3 - 3x.$$

Hiernaast vind je een plaatje van het richtingsveld op het domein $-4 \le x \le 4, \;\; -4 \le y \le 4$.



a. Alle punten op de y-as zijn rustpunten. Geef aan op welk gedeelte van de y-as deze aantrekkend, en op welke gedeelte deze afstotend zijn.

b. Bereken alle geïsoleerde rustpunten van het stelsel. Bepaal - via de linearisering(en) - de aard van de geïsoleerde kritieke punten.

c. Bepaal – door via $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{dy}{dx}$ de parameter t te elimineren – de oplossingskrommen door de punten (1,−1) en (−3,0).
Geef deze expliciet in de vorm $y = g(x)$.

d. Beschrijf het gedrag van de oplossing $(x(t), y(t))$ die start vanuit het punt (−3,0).
Geef in het bijzonder het gedrag van de oplossing als $t \to \infty$.

5. **a.** Bereken via de methode van het scheiden van variabelen (geen kant en klare formules!) de oplossing van de volgende warmtevergelijking met begin- en randvoorwaarden:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{16}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{(I)} \\ u(0,t) = u(2\pi,t) = 0 & \text{(II)} \\ u(x,0) = h(x) & \text{(III)} \end{cases} \quad \text{waarbij} \quad \begin{cases} 0 \le x \le 2\pi \\ 0 \le t \end{cases}$$

b. Bereken de oplossing in het geval dat $h(x) = \sin x$.

c. Geef een rij functies $u_k(x,t)$ die voldoen aan het begin-/rand-waardenprobleem dat ontstaat als (II) wordt veranderd in

$$\text{(II')} \quad u(0,t) = 0, \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi, t) = 0.$$

Uitwerkingen

1a Eerst maar $g(x)$ via stapfuncties toeschrijven naar een vorm waarin de Laplace-tabel direct toepasbaar is:

$$\begin{aligned} g(x) &= t\cdot(1-u_\pi(t)) + (2\pi - t)\cdot(u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)) \\ &= t - (2t-2\pi)u_\pi(t) + (t-2\pi)u_{2\pi}(t) \\ &= t - 2(t-\pi)u_\pi(t) + (t-2\pi)u_{2\pi}(t) \end{aligned}$$

Via de tabel is $\mathcal{L}[g]$ dan snel gevonden:

$$G(s) = \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-\pi s}}{s^2} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2}$$

1b Laplace-transformeren geeft

$s^2Y(s) - 2 + 4Y(s) = H(s)$, met uiteraard $H(s)$ de getransformeerde van $h(t)$

Herschreven:

$$Y(s) = \frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4}\cdot H(s)$$

Terugtransformeren:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sin 2t + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\cdot H(s)\right] \\ &= \sin 2t + (\tfrac{1}{2}\sin(2t)) * h(t) \\ &= \sin 2t + \int_0^t h(u)\cdot\tfrac{1}{2}\sin(2(t-u))\,du \end{aligned}$$

1c We hoeven alleen nog de convolutie uit te rekenen:

$$\begin{aligned} \int_0^t 4u\,\tfrac{1}{2}\sin(2(t-u))\,du &= \Big[u\cos(2(t-u))\Big]_{u=0}^{t} - \int_0^t \cos(2(t-u))\,du \\ &= t + \Big[\tfrac{1}{2}\sin(2t-2u)\Big]_{u=0}^{t} \\ &= t + \Big[\tfrac{1}{2}\sin 0 - \tfrac{1}{2}\sin 2t\Big] = t - \tfrac{1}{2}\sin 2t \end{aligned}$$

Dus het antwoord wordt: $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t + t$. (wat inderdaad aan de begin-voorwaarden voldoet).

2a Standaard rekenwerk leert:
eigenwaarden/eigenvectoren: $\lambda_1 = -1,\ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 4,\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
De algemene oplossing wordt dan

$$\mathbf{x}(t) = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-t} + c_2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}e^{4t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 2e^{4t} \\ -e^{-t} & 3e^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

2b (0,0) is een zadelpunt met 'aantrekrichting' $\pm\mathbf{v}_1$ en 'afstootrichting' $\pm\mathbf{v}_2$. Een globale schets is snel getekend.

2c Nodig: in de algemene oplossing $\mathbf{c}$ bepalen zodat $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow c_2 = 1 \quad \Rightarrow c_1 = -1$$

Levert het **antwoord** $\mathbf{x}(t) = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + 1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{4t} \\ e^{-t} + 3e^{4t} \end{bmatrix}$.

2d Een fundamentaalmatrix hadden we al (bijna): $\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} 1\,e^{-t} & 2\,e^{4t} \\ -1\,e^{-t} & 3\,e^{4t} \end{bmatrix}$,

met inverse $\mathbf{F}^{-1}(t) = \dfrac{1}{3e^{3t} + 2e^{3t}} \begin{bmatrix} 3e^{4t} & -2\,e^{4t} \\ e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3e^{t} & -2\,e^{t} \\ e^{-4t} & e^{-4t} \end{bmatrix}$.

Variatie van constanten: Stel $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{F}(t)\,\mathbf{u}(t)$, dan moet

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{g}(t) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3e^{t} & -2\,e^{t} \\ e^{-4t} & e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2t+2 \\ 2t+2 \end{bmatrix} e^{-t} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -10t+2 \\ 4e^{-5t} \end{bmatrix}$$

Daaruit volgt eenvoudig $\mathbf{u}(t) = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} -5t^2 + 2t \\ -\frac{4}{5}e^{-5t} \end{bmatrix}$, en daarmee wordt een particuliere oplossing

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{bmatrix} 1\,e^{-t} & 2\,e^{4t} \\ -1\,e^{-t} & 3\,e^{4t} \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -5t^2 + 2t \\ -\frac{4}{5}e^{-5t} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -5t^2 + 2t - \frac{8}{5} \\ 5t^2 - 2t - \frac{12}{5} \end{bmatrix} e^{-t}$$

Aangezien het 'laatste' deel ook al een homogene oplossing was,

kun je ook nemen $\mathbf{x}_p(t) = \begin{bmatrix} -t^2 + \frac{2}{5}t \\ t^2 - \frac{2}{5}t \end{bmatrix} e^{-t}$.

3 De coëfficiënten van de reeks $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ volgen uit

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 1\,dx = \ldots = \frac{3}{4}, \text{ en}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= \left[f(x)\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 - \int_0^2 f'(x)\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= 0 - \int_0^1 1\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx - \int_1^2 0\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= -\left[-\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1 \\
&= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right)
\end{aligned}$$

Nu geldt: $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{als } n \text{ oneven} \\ 1, & \text{als } n = 4k \\ -1, & \text{als } n = 4k+2 \end{cases}$ dus $a_n = \begin{cases} -4/(n\pi)^2, & n \text{ oneven} \\ 0, & n = 4k \\ -8/(n\pi)^2, & n = 4k+2 \end{cases}$

Dan kunnen we wel het begin opschrijven

$$\tfrac{3}{4} - \tfrac{4}{\pi^2}\cos\left(\tfrac{\pi x}{2}\right) - \tfrac{8}{4\pi^2}\cos\left(\tfrac{2\pi x}{2}\right) - \tfrac{4}{9\pi^2}\cos\left(\tfrac{3\pi x}{2}\right) - \tfrac{4}{5^2\pi^2}\cos\left(\tfrac{5\pi x}{2}\right) - \ldots$$

4a Bij de positieve y-as staan de pijlen van de y-as af gericht, dus hier stoot de y-as af. Bij de negatieve y-as staan de pijlen naar de y-as toe gericht, dus hier trekt de y-as aan.

4b Oplossen: $xy = 0$ en (tegelijk) $3x^3 - 3x = 3x(x^2-1) = 0$.
Afgezien van de punten (0,y) geeft dit de geïsoleerde rustpunten $(\pm 1,\, 0)$.
Matrix voor de linearisering $\begin{bmatrix} y & x \\ 9x^2-3 & 0 \end{bmatrix}$.
In het punt (1,0): $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$, heeft karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 6 = 0$, dus eigenwaarden $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{6}$. Dat duidt op een <u>zadelpunt</u>.
In het punt (-1,0): $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$, heeft karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 6 = 0$, dus eigenwaarden $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{6}$. Dat duidt op een <u>centrum</u>, voor het gelineariseerde stelsel, dus een centrum of (net een beetje) stabiel/instabiel spiraalpunt voor het niet-gelineariseerde stelsel.

4c

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^3 - 3x}{xy} = \frac{3x^2-3}{y} \qquad \text{een separabele DV!}$$

Standaardaanpak om op te lossen:

$$y\,dy = (3x^2-3)\,dx \;\Leftrightarrow\; \int y\,dy = \int (3x^2-3)\,dx \;\Leftrightarrow\; \tfrac{1}{2}y^2 = x^3-3x+K$$
$$\Leftrightarrow\; y^2 = 2x^3-6x+2K \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2x^3-6x+C}, \quad C\in\mathbb{R}$$

Oplossing door $(1,-1)$: $-1 = \pm\sqrt{2-6+C} \;\Rightarrow C=5$, en het teken $\pm$ is $-$.
Oplossing door $(-3,0)$: $0 = \pm\sqrt{-54+18+C} \;\Rightarrow C=36$, en het teken kan zowel $+$ als $-$ zijn.
Antwoorden: $y = -\pm\sqrt{2x^3-6x+5}$ resp. $y=\pm\sqrt{2x^3-6x+36}$.

4d Uit het richtingsveld volgt dat we de negatieve helft van de oplossing uit **c.** moeten nemen, en doordat de y-as bestaat uit aantrekkende rustpunten zal de oplossing voor $t\to\infty$ tot stilstand komen op de y-as. Met de oplossing uit **c.** volgt dat dat gebeurt in het punt $(0,-\sqrt{36}) = (0,\,-6)$.

5a Het gebruikelijke rataplan: stel $u(x,t) = X(x)T(t)$, vervolgens: scheid variabelen, dat geeft

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{1}{16}\frac{X''(x)}{X(x)} = \text{constant}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{X''(x)}{X(x)} = C\\ X(0)=0,\;\; X(2\pi)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \text{ voor } C = -\tfrac{1}{4}n^2:\;\; X(x) = \sin\left(\tfrac{1}{2}nx\right)$$

Voor de genoemde C:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \tfrac{1}{16}C = -\tfrac{1}{64}n^2 \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow\; T_n(t) = A_n\,e^{-\frac{1}{64}n^2 t}$$

All in all

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\tfrac{1}{2}nx\right)\; e^{-\frac{1}{64}n^2 t}$$

De A_n zijn de coëfficiënten van de sinusreeks van $h(x)$ op $[0,2\pi]$:

$$A_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x)\,\sin(\tfrac{1}{2}nx)\,dx$$

5b Dat wordt wel erg gemakkelijk! $A_2 = 1$, en de andere A_k zijn gelijk aan 0.
M.a.w. $u(x,t) = \sin x\, e^{-\frac{1}{16}t}$.

5c Het randwaardeprobleem voor $X(x)$ wordt nu $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{X''(x)}{X(x)} = C\\ X(0)=0,\;\; X'(2\pi)=0\end{array}\right.$

met oplossingen $X_k(x) = \sin(\omega_k x)$, $\omega_k = \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4}$, etc,
oftewel $\omega_k = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}k = \frac{2k+1}{4}$, $k = 0,1,2,3,4,\ldots$,
vanwege de eis $X_k'(2\pi) = \sin(2\pi\omega_k) = 0$.
Een rij van oplossingen wordt dan gegeven door de functies

$$u_k(x,t) = \sin(\omega_k x)\,e^{-\frac{1}{16}\omega_k^2 t}, \qquad \text{voor } \omega_k = \tfrac{2k+1}{4}, \quad k=0,1,2,\ldots$$