Technische Universiteit Delft, Fac. EWI

Tentamen Differentiaalvergelijkingen, wi2034TA, 25 januari 2012, 14:00-17.00 uur

---

Elk antwoord dient te worden beargumenteerd. Het gebruik van een boek en/of telefoon is **niet** toegestaan. Een Laplacetabel (met extra's) wordt bijgeleverd. Normen: opg. 1: 5 pt; opg. 2: 6 pt; opg. 3: 10 pt; opg. 4: 12 pt; opg. 5: 4 pt. ; opg. 6: 8 pt. Let op: meeste punten voor opg. 3, 4 en 6.

---

1. Bepaal (met behulp van de Laplace-transformatie) de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'(t) = t^2 + \int_0^t y(t-\tau)\cos\tau\, d\tau, \quad y(0) = 1.$$

(Bedenk: de integraal is een convolutie-integraal.)

2. Bepaal (ook met behulp van de Laplace-transformatie) de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y''(t) + y(t) = g(t) = \begin{cases} 1, & \text{als } \pi \le t \le 2\pi \\ 0, & \text{anders} \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

3. **a.** Bereken de algemene oplossing van het stelsel $\begin{cases} x_1' &= 2x_1 + 5x_2 \\ x_2' &= x_1 - 2x_2. \end{cases}$

b. Bereken en schets de baan van de oplossing die voldoet aan $x_1(0) = 4$, $x_2(0) = 2$.
Maak in hetzelfde plaatje - zonder verdere berekeningen - een schets van de oplossingskrommen door de punten (2,0) en (−2,0)

c. Bereken met de methode van variatie van constanten een ('particuliere') oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x_1'(t) = & 2x_1(t) + 5x_2(t) + 2e^{-3t} \\ x_2'(t) = & x_1(t) - 2x_2(t) - 2e^{-3t}. \end{cases}$$

4. Beschouw het autonome stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen gegeven door

$$\frac{dx}{dt} = x - y^2 \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = (x-1)(y-2).$$

a. Bepaal alle kritieke punten van het stelsel. Doe dit zorgvuldig!

b. Bepaal de aard van de kritieke punten van het niet-lineaire stelsel.

c. Ga na of er oplossingen zijn waar $x(t)$ dan wel $y(t)$ constant is. (En geef aan welke oplossingen dat dan zijn.)

d. Schets in het fasevlak een oplossingenveld dat consistent is met de voorgaande drie onderdelen.
Geef in het bijzonder aan of er oplossingskrommen zijn die van het ene kritieke punt naar het andere kritieke punt gaan.

5. Stel $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = \begin{cases} x, & \text{als } 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{als } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$

Bereken de coëfficiënten van de sinusreeks $s(x)$ van $f(x)$,
en schrijf $s(x)$ uit tot en met de vierde term ongelijk aan nul.
(Voor het gemak: $\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x$.)

6. Bereken via de methode van het scheiden van variabelen (geen kant en klare formules!) de oplossing van de volgende golfvergelijking met begin- en randvoorwaarden:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt} & = & 4u_{xx} \\ u(0,t) & = & u(2,t) \ = 0 \\ u(x,0) & = & 0 \\ u_t(x,0) & = & 3\sin(\pi x) + \sin(3\pi x) \end{array} \right. \qquad \text{waarbij} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq t. \end{array} \right.$$