naam *name*

studienummer *student number*

vak *course* Wi2034TA

code *code* datum *date* 25 01 2012

opleiding *program*

aantal ingeleverde vellen *total number of sheets* opgave nummer *question number*

TU Delft
Technische Universiteit Delft

1] NB $\int_0^t y(t-\tau)\cos\tau \, d\tau = y(t) * \cos t$

dus $\mathcal{L}\left[\int_0^t y(t-\tau)\cos\tau\, d\tau\right] = Y(s)\cdot \frac{s}{s^2+1}$

Laplace transformeren van de DV + BVW geeft

$$sY(s) - 1 = \frac{2}{s^3} + Y(s)\cdot\frac{s}{s^2+1}$$

Dit herschrijven:

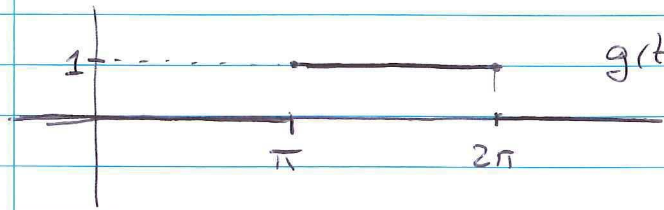
$$\left(s - \frac{s}{s^2+1}\right)Y(s) = \frac{s(s^2+1)-s}{s^2+1}\cdot Y(s) = \frac{s^3}{s^2+1}Y(s) = 1 + \frac{2}{s^3}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s^2+1}{s^3}\left(1+\frac{2}{s^3}\right) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} + \frac{2}{s^4} + \frac{2}{s^6}$$

Terugtransformeren is eenvoudig:

$$y(t) = 1 + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{2}{6}t^3 + \tfrac{2}{5!}t^5 = 1 + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{60}t^5$$

2]



$g(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$

laplace transformeren DV + BVW:

$$(s^2 Y(s) - 1) + Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1}\left(1 + \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s}\right)$$

terugtransformeren $\frac{1}{(s^2+1)s} = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s}$

via convolutieformule: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s}\right] = \sin t * 1$

$$= \int_0^t \sin \tau \, d\tau = 1 - \cos t$$

(of via breuksplitsen: $\frac{1}{(s^2+1)s} = \dots = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$)

Dan via de 'verschuifregel' $u_c(t) f(t-c) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-cs} F(s)$

$$y(t) = \sin t + u_\pi(t) \cdot (1 - \cos(t-\pi)) - u_{2\pi}(t) \cdot (1 - \cos(t - 2\pi))$$

$$= \begin{cases} \sin t, & 0 \le t < \pi \\ 1 + \sin t + \cos t, & \pi \le t < 2\pi \\ \sin t + 2\cos t, & 2\pi \le t \end{cases}$$

3] a] $\underline{x}' = A\underline{x} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}$. e.w.^{n}/e.v.^{n} van A berekenen :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \dots = \lambda^2 - 9 = (\lambda+3)(\lambda-3)$$

e.v. bij $\lambda = 3$: $\left[\begin{array}{cc|c} 2-3 & 5 & 0 \\ 1 & -2-3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \end{array}\right]$, $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

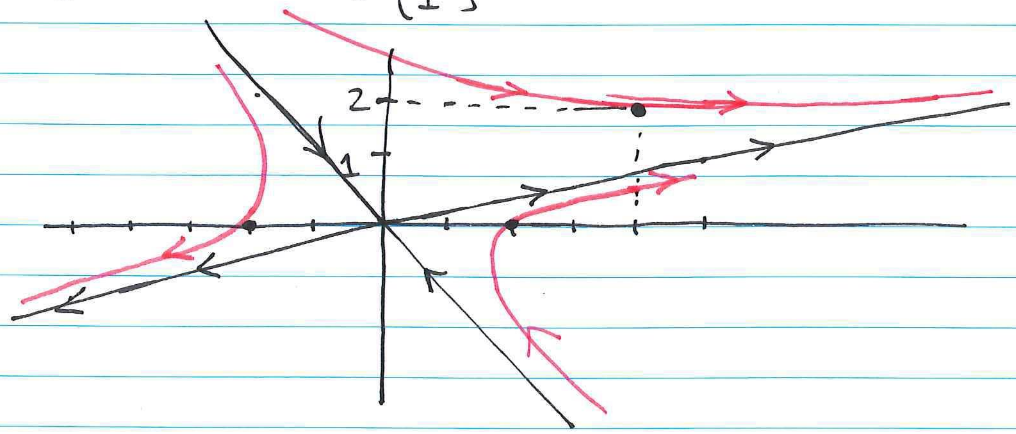
bij $\lambda = -3$: $\left[\begin{array}{cc|c} 2+3 & 5 & 0 \\ 1 & -2+3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

<u>Alg. opl.</u> $\underline{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t}$.

b] $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ als $c_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dots \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

geeft antwoord $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t}$

Voor plaatje: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ is zadelpunt met 'wegloopríchting' $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ en 'aantrekrichting' $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$



3] c] Fundamentaal matrix: $F(t) = \begin{bmatrix} 5e^{3t} & 1e^{-3t} \\ 1e^{3t} & -1e^{-3t} \end{bmatrix}$

met $$F^{-1}(t) = \frac{1}{\underbrace{5e^{3t}\cdot(-1e^{-3t}) - (1\cdot e^{3t})(1\cdot e^{-3t})}_{=-6}} \cdot \begin{bmatrix} -e^{-3t} & -e^{-3t} \\ -e^{3t} & 5e^{3t} \end{bmatrix}$$

oftewel $$F^{-1}(t) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-3t} \\ e^{3t} & -5e^{3t} \end{bmatrix}$$

Var. v. const: $\underline{x}_p(t) = F(t)\cdot\underline{c}(t)$

Invullen in DV $\underline{x}'(t) = A\cdot\underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-3t}$

geeft
$$\cancel{F'(t)\,\underline{c}(t)} + F(t)\cdot\underline{c}'(t) = \cancel{A\cdot F(t)\,\underline{c}(t)} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

$$\underline{c}'(t) = F^{-1}(t)\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-3t} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0\,e^{-3t} \\ 12\,e^{3t} \end{bmatrix}\cdot e^{-3t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dan wordt het heel eenvoudig: $\underline{c}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2t \end{bmatrix}$

en $\underline{x}_p(t) = F(t)\cdot\underline{c}(t) = \begin{bmatrix} 2t\,e^{-3t} \\ -2t\,e^{-3t} \end{bmatrix} = 2t\,e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

naam *name*	
studienummer *student number*	
vak *course*	
code *code*	datum *date*
opleiding *program*	
aantal ingeleverde vellen *total number of sheets*	opgave nummer *question number*

TU Delft
Technische Universiteit Delft

4] ~~kr~~.punten $\begin{cases} x - y^2 = 0 \\ (x-1)(y-2) = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \text{ of } y = 2 \end{cases}$

$x = 1$ invullen in 1e vgl: $1 - y^2 = 0 \Longleftrightarrow y = \pm 1$

$y = 2$ " " : $x - 4 = 0 \Longleftrightarrow x = 4$

Dus: drie kr.punten, $(4,2)$, $(1,1)$, $(1,-1)$

b] Jacobiaan: $\begin{bmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \text{etc.} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2y \\ y-2 & x-1 \end{bmatrix}$

Linearizeringen:

in $(4,2)$: $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ heeft e.w.n $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$
aard: instabiele knoop
(ook voor niet-lin. stelsel)

in $(1,1)$: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. $|A - \lambda I| = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$
e.w.n: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$
zadelpunt

in $(1,-1)$: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$. $|A - \lambda I| = \lambda^2 - \lambda + 6$
e.w.n: $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{23}}{2}$

complexe e.w.n met positief reëel deel
$\longrightarrow$ instabiel spiraalpunt.

in alle drie de gevallen is het gedrag van het niet-lineaire stelsel gelijk aan dat van de linearisering.

4] c] $x(t) = c \Rightarrow \frac{dx}{dt} = c - y^2$ gaat niet werken.

$y(t) = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$ geeft <u>wel</u> een oplossing.

d] Om een enigszins waarheidsgetrouw plaatje te krijgen:

bij linearisering in $(4,2)$, e.vector bij $\lambda = 1$
(geeft richting waarin $\underline{x}(t) \to \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ als $t \to -\infty$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-1 & -4 & 0 \\ 0 & 3-2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{e.v.} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bij lin. in $(1,1)$ e.v. bij $\lambda = 2$: $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ "wegloop richting"

bij $\lambda = -1$: $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

"draairichting" rond spiraalpunt $\begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}$:

5] $s(x) = \sum b_n \sin\frac{n\pi x}{3}$, $b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx$

$$= \frac{2}{3}\int_0^2 \frac{3}{n\pi}\cdot\frac{n\pi x}{3}\cdot \sin\frac{n\pi x}{3}\, dx \underset{\frac{n\pi x}{3}=t}{=}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{n\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{2n\pi}{3}} t\cdot \sin t \, dt$$

$$= \frac{6}{n^2\pi^2}\Big[\sin t - t\cdot\cos t\Big]_0^{\frac{2n\pi}{3}} = \underbrace{\frac{6}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3} - \frac{4}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}}_{\text{Antwoord}}$$

n	1	2	3	4	5	6	7
$\sin\frac{2n\pi}{3}$	$\frac12\sqrt3$	$\frac12\sqrt3$	0	$-\frac12\sqrt3$	$-\frac12\sqrt3$	0	$\frac12\sqrt3$
$\cos\frac{2n\pi}{3}$	$\frac12$	$-\frac12$	-1	$-\frac12$	$\frac12$	1	$\frac12$

Als we even niet op de convergentie letten

$$s(x) = \frac{3\sqrt3}{\pi^2}\Big[\sin\frac{\pi x}{3} + \frac{1}{2^2}\sin\frac{2\pi x}{3} - \frac{1}{4^2}\sin\frac{4\pi x}{3} - \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{3} + \frac{1}{7^2}\sin\frac{7\pi x}{3} + \dots\Big]$$

$$- \frac{2}{\pi}\Big[\sin\frac{\pi x}{3} - \frac12\sin\frac{2\pi x}{3} - \frac23\sin\frac{3\pi x}{3} - \frac14\sin\frac{4\pi x}{3} + \frac15\sin\frac{5\pi x}{3}$$
$$+ \frac26\sin\frac{6\pi x}{3} + \frac17\sin\frac{7\pi x}{3} - \frac18\sin\frac{8\pi x}{3} + \dots\Big]$$

beetje vervelend om expliciete formule voor b_n te geven.

6] Het gebruikelijke rateplan, in reuzenstappen (deelnemers moeten meer stapje-voor-stappen werken!)

$u(x,t) = X(x)\,T(t)$ substitueren in DV geeft

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = 4\,\frac{X''(x)}{X(x)} \stackrel{!}{=} c, \text{ constant.}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = u(2,t) = 0 \rightarrow X(0) = X(2) = 0 \\ \dfrac{X''(x)}{X(x)} = c \end{array}\right\} \begin{array}{l} X_n(x) = A_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \\ \text{voor } c = -\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{T''(t)}{T(t)} = 4c = -(n\pi)^2 \\ u(x,0) = 0 \Rightarrow T(0) = 0 \end{array}\right\} T_n(t) = B_n \cdot \sin(n\pi t)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cdot \sin\left(\tfrac{n\pi x}{2}\right) \cdot \sin(n\pi t)$$

Nu even opletten:

$$u_t(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi \cdot k_n \cdot \sin\left(\tfrac{n\pi x}{2}\right) \cdot \cos(n\pi t)$$

$$\Rightarrow u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi \cdot k_n \sin\left(\tfrac{n\pi x}{2}\right) \qquad (\text{want } \cos 0 = 1)$$

.... en dit moet gelijk zijn aan
$3\sin(\pi x) + \sin(3\pi x)$

Daaruit volgt: $2\pi \cdot k_2 = 3$, $6\pi k_6 = 1$
en $n\pi \cdot k_n = 0$, andere n

en dat leidt tot het antwoord

$$u(x,t) = \frac{3}{2\pi}\sin(\pi x)\sin(2\pi t) + \frac{1}{6\pi}\sin(3\pi x)\sin(6\pi t).$$