Technische Universiteit Delft, Fac. EWI

Tentamen Differentiaalvgln, wi2034TA, 8 november 2013, 14:00-17.00 uur

---

Elk antwoord dient te worden beargumenteerd. Het gebruik van een boek en/of telefoon is **niet** toegestaan. Een Laplacetabel (met extra's) wordt bijgeleverd.

Normen: opg. 1: 7 pt; opg. 2: 8 pt; opg. 3: 8 pt; opg. 4: 5 pt; opg. 5: 8 pt.

---

1. **a.** Bereken de Laplace-getransformeerde van de functie

$$g(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{als } 0 \leq t \leq \pi \\ 0\ , & \text{als } t \geq \pi \end{cases}$$

b. Bereken met behulp van de Laplacetransformatie de oplossing van het 'algemene' beginwaardeprobleem

$$y''(t) + 4y(t) = \sin(t), \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b$$

c. Bereken de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y''(t) + 4y(t) = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

Met de functie $g(t)$ van onderdeel **a**. (Vereenvoudig $y(t)$ voor $t \geq \pi$.)

2. **a.** Bereken de algemene oplossing van het stelsel $\begin{cases} x_1' = & x_1 + 2x_2 \\ x_2' = & -4x_1 - 3x_2 \end{cases}$

b. Classificeer het rustpunt (0,0) en geef een schets van een aantal oplossingen in het fasevlak.

c. Bereken de oplossing die voor $t = 0$ door het punt (1,4) gaat.

d. Bereken een ('particuliere') oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x_1'(t) = & x_1(t) + 2x_2(t) + \ e^{-t} \\ x_2'(t) = & -4x_1(t) - 3x_2(t) - 3e^{-t} \end{cases}$$

Aanwijzing: zoek een oplossing van de vorm $\mathbf{w}\, e^{-t}$

3. Beschouw het autonome stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} dx/dt = & x^2 - y \\ dy/dt = & (x-1)(y-4) \end{cases}$$

a. Bepaal alle kritieke punten (of: rustpunten) van het stelsel.

b. Bepaal - via de linearisering(en) - de aard van de kritieke punten van het niet-lineaire stelsel.
Schets in het fasevlak hoe de oplossingen zich rond de kritieke punten zullen gedragen.

c. Ga na of er oplossingen zijn waar $x(t)$ dan wel $y(t)$ constant is, en teken in het fasevlak de bijbehorende oplossingskrommen inclusief de richting waarin ze doorlopen worden.

d. Geef voor elk tweetal rustpunten P_i en P_j aan of er een of meer oplossingen zijn van (de omgeving van) P_i naar P_j.

4. Stel $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{als } 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{anders} \end{cases}$

Bereken de coëfficiënten van de sinusreeks $s(x)$ van de functie die periodiek is met periode 8, en op het interval $(0,4)$ gelijk is aan f. Schrijf $s(x)$ uit tot en met de vijfde term ongelijk aan nul.

De functie $s(x)$ is gedefinieerd voor elke $x \in \mathbb{R}$. Geef een schets van s op het interval $[0,12]$.

5. **a.** Bereken via de methode van het scheiden van variabelen (geen kant en klare formules!) de oplossing van de volgende Laplacevergelijking met begin- en randvoorwaarden:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{(I)} \\ u(x,0) = 0,\ u(x,4) = 0 & \text{(II)} \\ u(0,y) = 0,\ u(2,y) = \sin(\pi y) & \text{(III)} \end{cases} \quad \text{waarbij} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4. \end{cases}$$

b. Geef ook de oplossing van (I) die voldoet aan (II) en (III'):

$$u(0,y) = \sin(\pi y),\ u(2,y) = 0.$$

Uitwerkingen

1a Eerst $g(t)$ in 'standaardvorm' schrijven:

$$g(t) = \sin t - \sin t u_\pi(t) = \sin t - \sin(t-\pi) + \pi)u_\pi(t) = \sin t + \sin(t-\pi)u_\pi(t)$$

want $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$

1b

1c

2a

4

5a

5b

Normering

1a 4 pt. **2** per subonderdeel

1b 2 pt. **1** voor schrijven $g(t) = 2u_2(t) - 2u_4(t)$

1c 3 pt.

2a 5 pt. 3× **1** pt voor: eigenwn, eigenv, plaatje, **2** voor alg.opl.

2b 2 pt.

2c 2 pt.

3a 5 pt. **2** vinden kritieke punten; **3** voor karakterizeringen

3b 2 pt.

3c 2 pt.

4a 5 pt. **2** voor kennen formules, **3** voor rekenwerk

4b 2 pt. **1** voor kennen formules, **1** voor a_0.

4c 2 pt.

5a 7 pt. **2** voor scheiden varn, **2** voor $Y_n(y)$, **1** voor bijbeh. $X_n(x)$,
1 voor $u(x, y) = \sum c_n X_n(x) Y_n(y)$, en **1** voor antwoord.

5b 2 pt. **1** voor idee van 'splitsen'

$$\text{Cijfer} := \frac{\text{Totaal} + 5}{5}$$