Technische Universiteit Delft, Fac. EWI

Tentamen Differentiaalvergelijkingen, wi2034TA, 11 november 2011, 14.00-17.00 uur

---

Elk antwoord dient te worden beargumenteerd. Het gebruik van een boek en/of telefoon is **niet** toegestaan. Een Laplacetabel wordt bijgeleverd. Je mag gebruik maken van een rekenmachine.

Puntenverdeling: opg. 1,2 en 4 elk **12** punten, opg.3 **14** punten.

---

1. **a.** Bereken $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2(s+1)}\right]$ door gebruik te maken van een convolutie.

b. Bereken $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s+2}{s(s^2+2s+5)}\right]$.

c. Bereken met behulp van de Laplace-transformatie de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y''(t)+2y'(t)+y(t)=t\,e^{-t},\quad y(0)=2,\;\; y'(0)=-1.$$

d. Bereken eveneens de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y''(t)+2y'(t)+y(t)=\delta(t-2),\quad y(0)=2,\;\; y'(0)=-1.$$

2. **a.** Bereken de algemene oplossing van het stelsel $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & -5\end{pmatrix}\mathbf{x}$.

b. Wat is de aard van het evenwichtspunt (0,0)?

Maak een (grove) schets van een aantal oplossingen in het fasevlak. Geef daarin specifiek de banen (inclusief de richting) aan door punten (0,2) en (3,0).

c. Geef een particuliere oplossing voor het inhomogene stelsel

$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & -5\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}e^{-t}\\ -3e^{-t}\end{pmatrix}$$

3. Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt}=16x-8xy,\quad \frac{dy}{dt}=y(x-2-y)$$

a. Bereken en classificeer de kritieke punten.
(zadelpunt, instabiel spiraalpunt, enz.)

b. Toon aan dat de lijnen $x=0$ en $y=0$ oplossingskrommen zijn van het stelsel.

c. Bereken de oplossing $\mathbf{x}(t) = (0, y(t))$ die start vanuit het punt (0,1).
Aanwijzing: Welke (separabele) DV moet je hiervoor oplossen?
Je hoeft de oplossing niet expliciet te maken. Doe je dat wel, en bereken je tevens $\lim_{t\to\infty} y(t)$, dan kun je daarmee 1 *bonus*punt verdienen.

d. Geef een schets van de oplossingskrommen in het fasevlak met daarin de oplossingen uit onderdeel **b.** en consistent met hetgeen je in onderdeel **a.** gevonden hebt.
Geef voor de (eventuele) asymptotisch stabiele rustpunten het aantrekkingsgebied aan.

4. **a.** Bereken door scheiden van variabelen de oplossing $u = u(x,t)$ van de volgende warmtevergelijking met begin- en randvoorwaarden:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, \\ u_x(0,t) = 0,\ \ u_x(L,t) = 0, \ \text{ voor } \ t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x), \ \text{ voor } \ 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Geef de oplossing in de vorm van een reeks en geef (met een precieze formule) aan hoe je voor een 'concrete' functie $g(x)$ de coëfficiënten van deze reeks kunt berekenen.

Stel de randvoorwaarden zijn $u_x(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0$. (In het 'eindpunt' is niet de afgeleide maar de functiewaarde gefixeerd.)

b. Wat voor reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) T_n(t)$ krijg je nu als je de variabelen scheidt?

Opmerking: je hoeft in dit geval *niet* aan te geven hoe je de c_n zou moeten berekenen.

Uitwerkingen

1a $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right] = t$ en $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+1}\right] = e^{-t}$, dus

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] &= t * e^{-t} = \int_0^t \tau\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau = \int_0^t \tau\, e^t\, e^\tau\, d\tau \\ &= e^{-t}\int_0^t \tau\, e^\tau\, d\tau = e^{-t}\left[\tau e^\tau - e^\tau\right]_0^t = e^{-t}\left(te^t - e^t + 1\right) = t - 1 + e^{-t}\end{aligned}$$

1b Breuksplitsen natuurlijk! $s^2+2s+5 = (s+1)^2+4$ heeft geen (reële) nulpunten, dus is niet te ontbinden.

$$\frac{s+2}{s(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+5} = \frac{A(s^2+2s+5)+Bs^2+Cs}{s(s^2+2s+5)}$$

Coëfficiënten in de tellers vergelijken geeft achtereevolgens $A = \frac{2}{5}$, $B = -\frac{2}{5}$ en $C = \frac{1}{5}$. Dan volgt de teruggetransformeerde vrij eenvoudig:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2/5}{s} + \frac{-2/5s+1/5}{s^2+2s+5}\right] = \frac{2}{5} + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2/5(s+1)+3/5}{(s+1)^2+2^2}\right] = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\cos t e^{-t} + \frac{3}{10}\sin t e^{-t}$$

1c Transformeren geeft

$$\begin{aligned}s^2Y(s) - 2s - (-1) + 2(sY(s)-2)) + Y(s) &= (s^2+2s+1)Y(s) - 2s - 3 = \frac{1}{(s+1)^2} \\ &\Leftrightarrow\ Y(s) = \frac{2s+3}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^4}\end{aligned}$$

Terugtransformeren is niet zoveel werk:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+3}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2(s+1)+1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^4}\right] = 2e^{-t} + te^{-t} + \tfrac{1}{6}t^3e^{-t}$$

1d Het meeste werk is al gedaan.
Transformeren geeft nu $(s^2+2s+1)Y(s) - 2s - 3 = \dfrac{1}{e^{-2s}}$,
en dit terugtransformeren:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+3}{(s+1)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s+1)^2}\right] = 2e^{-t} + te^{-t} + u_2(t)(t-2)e^{-(t-2)}$$

waarbij (weer) gebruikt is dat $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s+1)^2}\right] = t\, e^{-t}$.

2a Gaat via de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-5-\lambda) + 9 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2$$

De eigenwaarden: $\lambda_{1,2} = -2$ (dubbel!). Eigenvector bij $\lambda_1 = -2$: oplossen $(A - (-2)I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .... geeft $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, 'helaas' maar 1.
De matrix is 'helaas' niet diagonaliseerbaar.
Een eerste oplossing: $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v} \cdot e^{-2t}$.
Voor een tweede onafhankelijke oplossing, standaardaanpak:
stel $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{u} \cdot e^{-2t} + t\mathbf{w} \cdot e^{-2t}$. Dan moet:

$$-2\mathbf{u}e^{-2t} + \mathbf{w}e^{-2t} - 2t\mathbf{w}e^{-2t} = A\mathbf{w}e^{-2t} + t\mathbf{w}e^{-2t}$$

Termen met factor t vgln.: $\mathbf{w}$ moet e.v. zijn bij $\lambda = -2$; ik neem $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Vervolgens volgt $\mathbf{u}$ uit $A\mathbf{u} + 2\mathbf{u} = \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

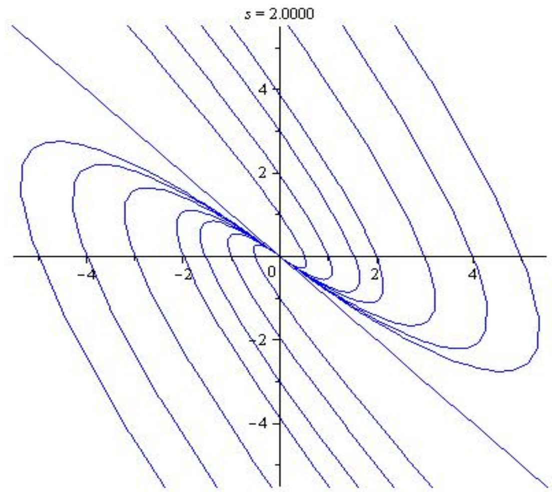
$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{geeft (bijv)} \quad \mathbf{u} = \tfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en daarmee wordt een tweede oplossing $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} t + \frac{1}{6} \\ -t + \frac{1}{6} \end{bmatrix} e^{-2t}$.

De algemene oplossing:

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} t + \frac{1}{6} \\ -t + \frac{1}{6} \end{bmatrix} e^{-2t}$$

2b De oorsprong is een stabiele oneigenlijke knoop (improper node).
Zowel voor $t \to \infty$ als voor $t \to -\infty$ is de 'leading term' het gedeelte $c_2 \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} e^{-2t} = c_2 t\mathbf{v}e^{-2t}$, dus voor $t \to \infty$ nadert de oplossing vanuit de richting $\pm\mathbf{v}$ naar de oorsprong, en voor $t \to -\infty$ loopt de oplossing in de richting $\pm\mathbf{v}$ weg naar oneindig. Door op de assen te kijken kun je zien dat van onder de lijn $y = -x$ de oorsprong wordt benaderd vanuit de richting $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en van boven vanuit de richting $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Dit bij elkaar is wel genoeg voor een schets.



2c $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v} \cdot e^{-t}$ subtitueren geeft

$$\mathbf{x}'(t) = -\mathbf{v} \cdot e^{-t} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{v} \cdot e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Herschrijven leert dat $\mathbf{v}$ moet voldoen aan $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Dit stelsel heeft (unieke) oplossing $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$, en een particulier oplossing wordt dan $\mathbf{x}_p(t) = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t}$.

3a

$$\frac{dx}{dt} = 8x(2-y) \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } y = 2$$

Dit invullen in $\dfrac{dy}{dt} = 0$ geeft **drie** rustpunten: $(0,0)$, $(0,-2)$ en $(4,2)$. Om te lineariseren, bekijk: $J(x,y) = \begin{bmatrix} dF/dx & dF/dy \\ dG/dx & dG/dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-8y & -8x \\ y & x-2-2y \end{bmatrix}$.

$\boxed{(0,0)}$ $J(0,0) = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ De matrix heeft dus eigenwaarden 16 (met eigenvector (1,0)) en -2 (e.v. (0,1)), hetgeen correspondeert met een **zadelpunt**.

$\boxed{(0,-2)}$ $J(0,-2) = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ met e.w.n 32 (e.v. (15,-1)) en 2 (e.v. (0,1)). Een **instabiele knoop**.

$\boxed{(4,2)}$ $J(4,2) = \begin{bmatrix} 0 & -32 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ Deze matrix heeft karakteristiek polynoom $\lambda^2 + 2\lambda + 64 = (\lambda+1)^2 + 63$ met nulpunten $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{63}$. De eigenwaarden zijn complex, met een negatief reëel deel, hetgeen correspondeert met een **stabiel spiraalpunt**.

3b Hoe simpel kan het zijn?
Vanuit een punt op de lijn $x = 0$ geldt $\dfrac{dx}{dt} = 8 \cdot 0 - 16 \cdot 0 \cdot y = 0$, dus x blijft constant, en aangezien gestart wordt vanuit $x = 0$, blijft x gelijk aan 0.
Net zo voor $y = 0$.

3c Op te lossen: $\frac{dy}{dt} = y(0 - 2 - y) = -y(y + 2)$. Variabelen scheiden en primitiveren:

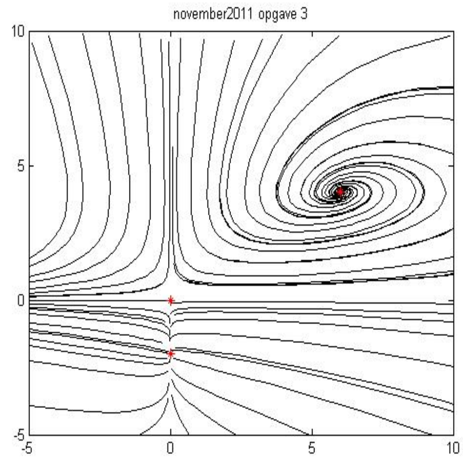
$$\begin{aligned} \frac{1}{y(y+2)}\,dy = -dt \Rightarrow \int \frac{1}{y(y+2)}\,dy &= \int \frac{1}{2}\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\frac{1}{y+2}\,dy = \int -dt \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = -t + C \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{y}{y+2}\right| = e^{-2t+2C} = K\,e^{-2t} \end{aligned}$$

Om te zorgen dat $y(0) = 1$ moet $\dfrac{1}{1+2} = K$, dus $K = \frac{1}{3}$, en het antwoord luidt $\dfrac{y}{y+2} = \frac{1}{3}e^{-2t}$.
Expliciete oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{y}{y+2} = \tfrac{1}{3}e^{-2t} \quad &\leftrightarrow \quad y = (y+2)\tfrac{1}{3}e^{-2t} = y\tfrac{1}{3}e^{-2t} + \tfrac{2}{3}e^{-2t} \\ &\leftrightarrow \quad \left(1 - \tfrac{1}{3}e^{-2t}\right) y = \tfrac{2}{3}e^{-2t} \\ &\leftrightarrow \quad y = y(t) = \frac{\frac{2}{3}e^{-2t}}{1 - \frac{1}{3}e^{-2t}} \qquad \left(= \frac{2}{3e^{2t} - 1} \right) \end{aligned}$$

En dan heel simpel $\displaystyle\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{2}{3}e^{-2t}}{1 - \frac{1}{3}e^{-2t}} = \frac{0}{1-0} = 0.$

3d Het plaatje moet in ieder geval aangeven een 'spiraal rechtsom' naar het punt (6,4) bevatten, alsmede de oplossingen op de coördinaatassen (inclusief de richtingen). Het aantrekkingsgebied van het punt (6,4) is het hele eerste kwadrant. Matlab geeft hoe het er echt uitziet.



4a Het gebruikelijke rataplan:
stel $u(x,t) = X(x)T(t)$, vervolgens: scheid variabelen, dat geeft

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{constant}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = C \\ X'(0) = 0,\ \ X'(L) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{ voor } C = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 : \quad X(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Voor de genoemde C:

$$T'(t)/T(t) = \alpha^2 C = -\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 \Rightarrow \quad T_n(t) = (A_n)\, e^{-\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 t}$$

All in all

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, e^{-\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Om nu te zorgen dat $u(x,0) = g(x)$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = g(x)$ levert

$A_0 = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\,dx$, en voor $n \geq 1$ $\displaystyle A_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx$, oftewel, de coëfficiënten van de cosinusreeks van $g(x)$.

4b Het verschil zit 'm in de randvoorwaarden voor X:

$$\begin{array}{l} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = C \\ X'(0) = 0,\ \ X(L) = 0 \end{array}$$

Opnieuw zijn er voor $C = \lambda^2 > 0$ geen niet-triviale oplossingen: de algemene oplossing wordt dan $X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$, en om aan de randvoorwaarden te voldoen moet tegelijk $\lambda A - \lambda B = 0$ en $Ae^{\lambda L} + Be^{-\lambda L} = 0$, en dat kan alleen als $A = B = 0$.

$C = 0$ leidt ook tot de triviale oplossing.

Resteert $C = -\lambda^2 < 0$.
Dan $X(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$, $X'(0) = 0 \rightarrow A = 0$,
en dan $X(L) = 0 \rightarrow B\cos(\lambda L) = 0 \rightarrow \lambda L = (n + \frac{1}{2})\pi$,
dus $\lambda = \dfrac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L} = \dfrac{2(n+1)\pi}{2L}$.
Hierop voortbordurend krijg je dan oplossingen

$$X_n(x)T_n(t) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right)\, e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)^2 t}.$$