

**Tentamen Differentiaalvergelijkingen WI2034TA**  
6 november 2009 14.00-17.00 uur

---

1. A Stel  $g(t) = t \cos(at)$ . Laat zien dat

$$\mathcal{L}[g](s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{1}{s^2 + a^2} - \frac{2a^2}{(s^2 + a^2)^2}.$$

Hint: gebruik formule 19 van je formuleblad ( $F^{(n)}$  betekent de  $n$ -de afgeleide van de functie  $F$ ).

- B Gegeven het beginwaardenprobleem

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin(2t) \\ y(0) = 0 \text{ en } y'(0) = 0. \end{cases}$$

Bepaal de oplossing via de Laplace-transformatie (gebruik A!).

2. Gegeven is het lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen met beginconditie:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \text{ en } \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de oplossing  $\mathbf{x}(t)$ .

3. Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = (x^2 + 1)(y^2 - 1), \quad \frac{dy}{dt} = 2x(x^2 + 1)$$

- A Laat zien dat de krommen gegeven door

$$\frac{1}{3}y^3 - y - x^2 = C,$$

met  $C \in \mathbb{R}$ , oplossingskrommen zijn van het stelsel.

- B Geef een analyse van het (de) kritieke punt(en), en schets het fase-vlak, ook gebruik makend van A. Geef van elk kritiek punt aan of het stabiel, asymptotisch stabiel of instabiel is.

4. Voor een vaste  $a \in [0, 1]$ , beschouwen we de functie  $f$  met periode 4, zodat voor  $x \in [-2, 2]$  geldt

$$f(x) = \begin{cases} -2 - x & \text{als } x \in [-2, -2 + a] \\ -a & \text{als } x \in [-2 + a, -a] \\ x & \text{als } x \in [-a, a] \\ a & \text{als } x \in [a, 2 - a] \\ 2 - x & \text{als } x \in [2 - a, 2]. \end{cases}$$

- A Geef een schets van  $f$  op het interval  $[-6, 6]$  als  $a = \frac{1}{2}$ .
- B Bepaal de Fourierreeks van  $f$  voor elke waarde van  $a \in [0, 1]$ . Hint: na een aantal stappen, helpt het om  $f'$  te bepalen en partiële integratie te gebruiken.
5. Een elastisch koord wordt gespannen tussen twee punten  $A$  en  $B$  over een afstand van 2 meter;  $A = 0$  en  $B = 2$ . In het midden wordt het koord 1 meter omhoog gehouden (het koord staat dan in een tent-vorm), en op tijdstip  $t = 0$  wordt het koord losgelaten. De uitwijking  $u(x, t)$  van het koord op locatie  $x \in [0, 2]$  en tijdstip  $t \geq 0$  voldoet aan de golfvergelijking:

$$4u_{xx} = u_{tt}.$$

- A Bepaal  $u(x, t)$  voor alle  $x \in [0, 2]$  en  $t \geq 0$ .
- B Hoelang duurt het voordat het koord zich voor het eerst weer in de beginpositie bevindt? Schets ook de stand van het koord op tijdstip  $t = \frac{1}{4}$ . Hint: u kunt gebruiken dat

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}a\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}(2-a)\right) = 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(n\pi\frac{1-a}{2}\right).$$