

**Tentamen Differentiaalvergelijkingen WI2034TA**  
1 november 2007 14.00-17.00 uur

---

*rekenmachine is toegestaan.*

---

1. Gegeven het beginwaardenprobleem:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 2u_1(t)e^{2-2t} \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

- A Bepaal de Laplace getransformeerde van  $u_1(t)e^{2-2t}$ .
- B Los het beginwaardeprobleem op met de Laplace-transformatie.

2. Gegeven is het lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

en gegeven is dat de eigenwaarden van de matrix gelijk zijn aan  $1 \pm i$ .

- A Bepaal de algemene oplossing van dit stelsel differentiaalvergelijkingen.
- B Los het stelsel op onder de beginwaarde  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  en schets de oplossing in het fasevlak.

3. Gegeven is het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} dx/dt = x - xy, \\ dy/dt = -y + xy \end{cases}$$

- A Onderzoek elk evenwichtspunt: is het een bron, een put, een zadelpunt of een spiraalpunt.
- B Bepaal de oplossing van deze differentiaalvergelijking onder de beginwaarde  $x(0) = 1, y(0) = 0$ .
- C Schets het fasevlak.

4. De periodieke functie  $f(x)$  met periode  $2\pi$  is op het interval  $[-\pi, \pi]$  gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -\pi/2, \\ 1 & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \\ 0 & x > \pi/2 \end{cases}$$

A Bepaal de Fourierreeks van  $f$ .

B Schets de grafiek van de partiële som voor de eerste twee perioden.

5. Gegeven de warmtevergelijking  $u_{xx} = u_t$  voor  $0 < x < \pi$  en  $t > 0$  met de volgende randvoorwaarden

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) &= \sin x + \sin 3x, \quad 0 \leq x \leq \pi \end{aligned}$$

A Bepaal  $u(x, t)$ .

B Teken de grafiek van  $u(x, 0)$  en  $u(x, 1)$  en beschrijf het verloop van  $u$  in de tijd.