tentamenuitwerking 1/11/07

opgave 1

3pt A $\mathcal{L}\left[u_1(t)\, e^{2-2t}\right] = \mathcal{L}\left[u_1(t) e^{-2(t-1)}\right]$

gebruik formule 13 : $e^{-s}\mathcal{L}\left[e^{-2t}\right]$

gebruik formule 2 : $e^{-s}/s+2$

6pt B $\mathcal{L}\left[y'' + 2y' + 2y\right] = \mathcal{L}\left[2u_1(t) e^{2-2t}\right]$

$\Rightarrow \quad s^2\mathcal{L}[y] + 2s\mathcal{L}[y] + 2\mathcal{L}[y] = 2e^{-s}/_{s+2}$

want $y(0) = y'(0) = 0$

Omrekenen geeft $\mathcal{L}[y] = e^{-s}\dfrac{2}{(s+2)(s^2+2s+2)}$

Breuksplitsen $\dfrac{2}{(s+2)(s^2+2s+2)} = \dfrac{A}{s+2} + \dfrac{Bs+C}{s^2+2s+2}$

omrekenen $2 = A(s^2+2s+2) + (Bs+C)(s+2)$

$\Rightarrow \quad A + B = 0 \qquad 2A + 2B + C = 0 \qquad 2A + 2C = 2$

$\Rightarrow \quad A = 1 \qquad B = -1 \qquad C = 0$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{e^{-s}}{s+2} + \frac{se^{-s}}{s^2+2s+2} = \frac{e^{-s}}{s+2} + \frac{se^{-s}}{(s+1)^2+1}$$

$$Y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{se^{-s}}{(s+1)^2+1}\right]$$

De 1e formule herken je uit opgave A

Voor de 2e, gebruik formule 9/10 met $a=-1$, $b=1$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)^2+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right]$$

$$= e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$$

gebruik nu weer formule 13:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{se^{-s}}{(s+1)^2+1}\right] = u_1(t)\left\{e^{-(t-1)}\cos(t-1) - e^{-(t-1)}\sin(t-1)\right\}$$

<u>Oplossing</u>

$$u_1(t)\left\{e^{2-2t} + e^{1-t}\cos(t-1) + e^{1-t}\sin(t-1)\right\}$$

Een enkele slimmerik heeft dit rekenwerk vermeden via de convolutie-integraal.

opgave 2

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ heeft eigenwaarde $1 \pm i$

A Bepaal een eigenvector:

6 pt

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \underline{x} = (1+i)\,\underline{x}$$ dus

$$\begin{pmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0}$$

Een oplossing is $\underline{x} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix}$

Nu zijn oplossingen van de DV het reële en imaginaire deel van $e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= e^{t}\big(\cos(t) + i\sin(t)\big)\begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$e^{t}\begin{pmatrix} -\cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + i e^{t}\begin{pmatrix} -\sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

<u>oplossing</u>

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -e^{t}\cos(t) - e^{t}\sin(t) \\ e^{t}\cos(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -e^{t}\sin(t) + e^{t}\cos(t) \\ e^{t}\sin(t) \end{pmatrix}$$

Opgave 3

A evenwichtb punten: $\begin{cases} x - xy = 0 \\ -y + xy = 0 \end{cases}$
3 pt

dus $\begin{cases} x(1-y) = 0 \\ y(x-1) = 0 \end{cases}$ omrekenen $\begin{cases} x = 0 \text{ of } y = 1 \\ y = 0 \text{ of } x = 1 \end{cases}$

Twee evenwichtspunten: $(0,0)$ en $(1,1)$

Jacobiaan $\begin{bmatrix} 1-y & -x \\ y & x-1 \end{bmatrix}$

In de oorsprong is dit $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ eigenwaarden ± 1

Zadelpunt

In $(1,1)$ is dit $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ eigenwaarden $\pm i$

Spiraalpunt

3pt B als $y = 0$ dan $y' = 0$ dus y blijft nul

De differentiaalvergelijking is $x' = x$

alle andere termen vallen weg

Oplossing $(e^t, 0)$.

Dit was de gemene vraag voor de 10

B Vul in $t=0$ in de bovenstaande vergelijking

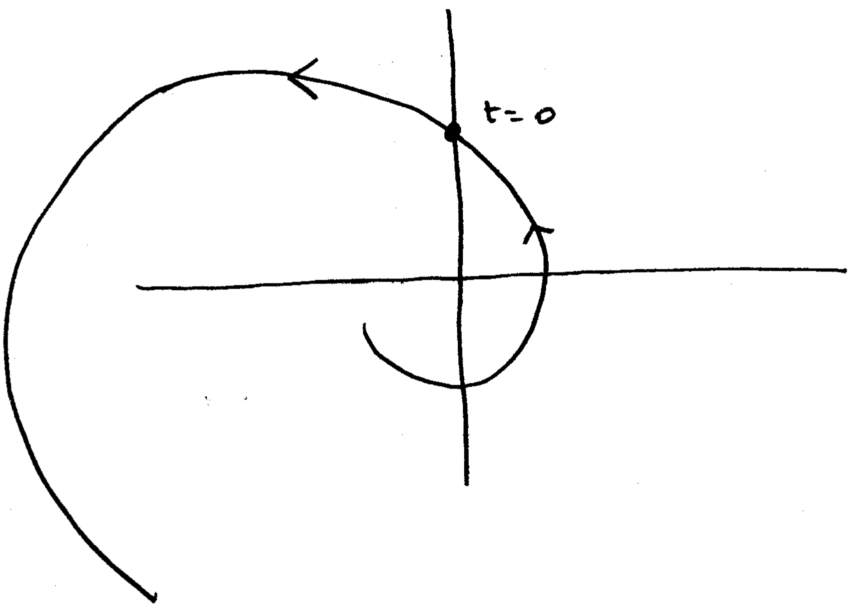
3pt

$$\underline{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

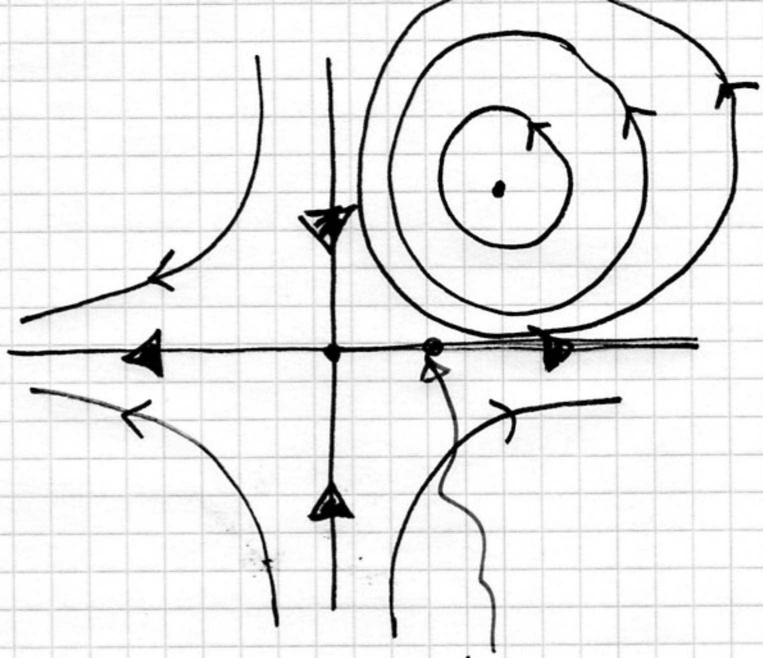
neem $c_1 = c_2 = 1$ dus

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} -2e^t \sin(t) \\ e^t \cos(t) + e^t \sin(t) \end{pmatrix}$$

De eigenwaarden $1 \pm i$ impliceren een spiraalpunt, onstabiel want reëel deel > 0



C



er is maar 1 manier om zadel en spiraal samen te knopen.

opgave 4

6pt A De functie f is even $f(x) = f(-x)$ dus

ontwikkel in een cosinusreeks

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \qquad \text{merk op } L = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{-n\pi}{2}\right) \right\}$$

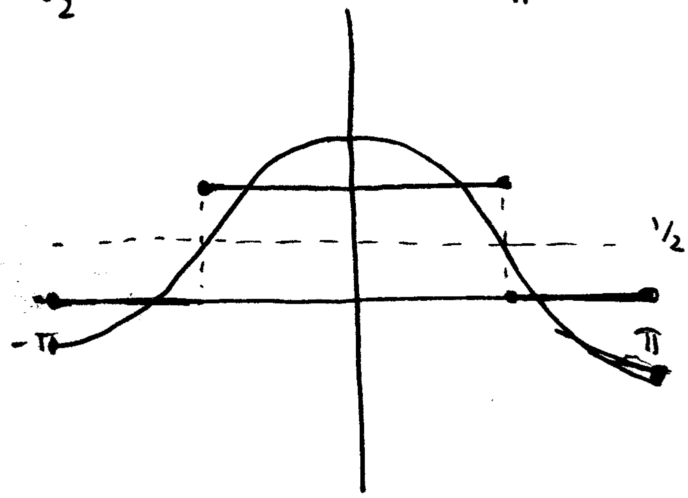
$$= \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad \text{merk op } a_0 = 1 \;!$$

$a_1 = \frac{2}{\pi}$ $\quad a_2 = 0$ $\quad a_3 = \frac{-2}{3\pi}$ $\quad a_4 = 0$ $\quad a_5 = \frac{2}{5\pi}$ enz.

$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x)$

$a_1 = \frac{2}{\pi}$ $\quad a_2 = 0$ $\quad 2/\pi > 1/2$

$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos x$



opgave 5

t A algemene oplossing is $\sum c_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$

In dit geval moet voor $t=0$ gelden

$\sum c_n \sin(nx) = \sin(x) + \sin(3x)$

dus $c_1 = c_3 = 1$ en de rest is nul

Oplossing $e^{-t} \sin(x) + e^{-3t} \sin(3x)$

Eventueel zelf bepalen via oplossingen van type

$u = F(t)\, G(x)$ met voor $G(x)$ de

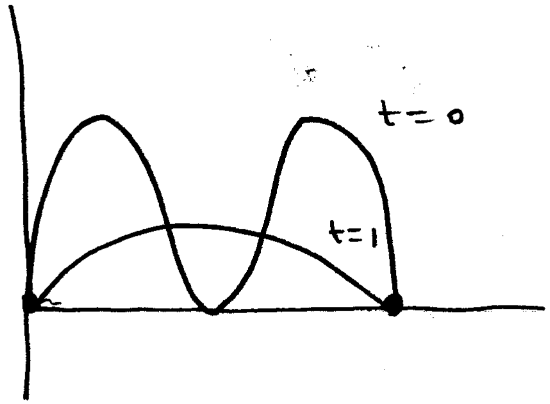
functies $\sin(x)$ en $\sin(3x)$. Beide oplossingen

bij elkaar optellen.

B $u(x,0) = \sin(x) + \sin(3x)$

$u(x,1) = e^{-1}\sin(x) + e^{-9}\sin(3x)$

e^{-9} is ongeveer 0.001, dus verwaarloosbaar



Temperatuur zakt weg.

Op $t=10$ is de temperatuur nagenoeg nul.