Technische Universiteit Delft — Mekelweg 4
Faculteit EWI — 2628 CD Delft

Tentamen Differentiaalvergelijkingen wi2034TA

vrijdag 21 januari 2005

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven. Licht alle door u gegeven antwoorden toe, zodat duidelijk blijkt op welke manier u aan de door u gegeven antwoorden gekomen bent. U krijgt ook Tabel 6.2.1; deze tabel zit aan dit tentamen vast. Verder mag u een tweezijdig beschreven A4 gebruiken. Echter, het gebruik van boek of aantekeningen is niet toegestaan. Elk onderdeel van elke opgave zal even zwaar wegen, dus opgave 1 zal even zwaar wegen als bijvoorbeeld opgave 2a .

1. Gegeven is het volgende beginwaarde probleem voor $y = y(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = 2\mathrm{e}^t, \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

   Bepaal de oplossing van dit beginwaarde probleem voor $y = y(t)$.

2. Bepaal de inverse Laplace getransformeerde van de volgende functies:

$$F(s) = \frac{8s^2 - 4s + 12}{s(s^2+4)}$$

   en

$$F(s) = \frac{2s-3}{s^2+2s+10}.$$

3. Gegeven is de volgende 2^e orde, lineaire differentiaalvergelijking voor $y = y(t)$:

$$y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-t}. \qquad (1)$$

   a. Bepaal met behulp van de methode van onbepaalde coefficienten de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking.

   b. Bepaal met behulp van de Laplace transformatie de oplossing van de differentiaalvergelijking (1), als bovendien de beginvoorwaarden

$$y(0) = 0, \qquad \text{en} \quad y'(0) = 1$$

   gegeven zijn.

4. Beschouw het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 - \frac{1}{2}x_2. \end{cases}$$

   a. Bepaal de algemene oplossing van dit stelsel.

   b. Schets in het fase-vlak (dwz. in het (x,y)-vlak) enkele integraalkrommen (= oplossingen). Wat voor type evenwichtspunt is de oorsprong?

5. Gegeven is het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x + y + 2xy \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -4x - y + x^2 - y^2. \end{cases}$$

Laat zien dat $(0,0)$ een kritiek punt is van dit stelsel. Wat is het bijbehorende lineaire systeem?

6. Gegeven is een functie f, die voldoet aan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{als } -1 \leq x < 0 \\ x^2, & \text{als } 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

en $f(x+2) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbf{R}$.

a. Bepaal de Fourierreeks van f.

b. Voor welke waarden van x convergeert deze Fourierreeks, en naar welke waarden convergeert deze Fourierreeks dan?

TABLE 6.2.1 Elementary Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Notes
1. 1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Ex. 4
2. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$	Sec. 6.1; Ex. 5
3. t^n; $n =$ positive integer	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Prob. 27
4. t^p, $p > -1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Prob. 27
5. $\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Ex. 6
6. $\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Prob. 6
7. $\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$	Sec. 6.1; Prob. 8
8. $\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$	Sec. 6.1; Prob. 7
9. $e^{at} \sin bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1; Prob. 13
10. $e^{at} \cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1; Prob. 14
11. $t^n e^{at}$, $n =$ positive integer	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$	Sec. 6.1; Prob. 18
12. $u_c(t)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.3
13. $u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$	Sec. 6.3
14. $e^{ct} f(t)$	$F(s-c)$	Sec. 6.3
15. $f(ct)$	$\dfrac{1}{c} F\left(\dfrac{s}{c}\right), \quad c > 0$	Sec. 6.3; Prob. 19
16. $\int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau$	$F(s)G(s)$	Sec. 6.6
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}	Sec. 6.5
18. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	Sec. 6.2
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	Sec. 6.2; Prob. 28