Technische Universiteit Delft — Mekelweg 4
Faculteit EWI — 2628 CD Delft

Tentamen Differentiaalvergelijkingen wi2034TA

vrijdag 5 november 2004

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven. Licht alle door u gegeven antwoorden toe, zodat duidelijk blijkt op welke manier u aan de door u gegeven antwoorden gekomen bent. U krijgt ook Tabel 6.2.1; deze tabel zit aan dit tentamen vast. Verder mag u een tweezijdig beschreven A4 gebruiken. Echter, het gebruik van boek of aantekeningen is niet toegestaan. Elk onderdeel van elke opgave zal even zwaar wegen.

1. Gegeven is het volgende beginwaarde probleem voor $y = y(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 2y = 3\mathrm{e}^t, \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Bepaal de oplossing van dit beginwaarde probleem voor $y = y(t)$.

2. Gegeven is de volgende 2^e orde, lineaire differentiaalvergelijking voor $y = y(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 3y = 4\mathrm{e}^t. \tag{1}$$

   a. Bepaal met behulp van de methode van onbepaalde coefficienten de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking.

   b. Bepaal met behulp van de Laplace transformatie de oplossing van de differentiaalvergelijking (1), als bovendien de beginvoorwaarden

$$y(0) = 0, \qquad \text{en} \quad y'(0) = 0$$

   gegeven zijn.

3. Substitueer in de differentiaalvergelijking van opgave 2:

$$x_1 = y, \qquad \text{en} \quad x_2 = y'.$$

   a. Laat zien dat de differentiaalvergelijking uit opgave 2 door deze substitutie overgaat in het stelsel niet-homogene differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 + 4\mathrm{e}^t. \end{cases}$$

   b. Het stelsel uit onderdeel **a** kan geschreven worden als

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix},$$

   of als $\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{g}(t)$, waarbij A een 2×2-matrix is, en

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}, \qquad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$$

   Bepaal de algemene oplossing van het stelsel van homogene differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

c. Schets in het fase-vlak (dwz. in het (x, y)-vlak) enkele integraalkrommen (= oplossingen) van het stelsel van homogene differentiaalvergelijkingen (uit onderdeel **b**). Wat voor type evenwichtspunt is de oorsprong?

d. Om de algemene oplossing van $\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{g}(t)$ te vinden hoeven we alleen nog maar een particuliere oplossing van dit stelsel te vinden, en die op te tellen bij de algemene oplossing van het homogene stelsel (die u in onderdeel **b** van deze opgave gevonden hebt).
Geef een particuliere oplossing van $\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{g}(t)$ (met A en $\underline{g}(t)$ als in onderdeel **b**).

4. Gegeven is het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + 2x^3. \end{cases}$$

a. Bepaal het evenwichtspunt van dit stelsel differentiaalvergelijkingen. Wat is het het bijbehorende lineaire systeem?

b. Bepaal $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, en geef de oplossing van de differentiaalvergelijking die u zo krijgt in de vorm $H(x, y) = c$, met c een constante. Vervolgens, schets in het fase-vlak (dwz. in het (x, y)-vlak) enkele integraalkrommen. Hoe gedragen de oplossingen zich als $t \to \infty$?

5. Gegeven is een functie f, die voldoet aan:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{als } -1 \leq x < 0 \\ 1 - x, & \text{als } 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

en $f(x + 2) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbf{R}$.

a. Bepaal de Fourierreeks van f.

b. Voor welke waarden van x convergeert deze Fourierreeks, en naar welke waarden convergeert deze Fourierreeks dan?