

Tentamen : Differentiaalvergelijkingen (WI2034TA)**Datum** : vrijdag 9 januari 2004**Tijd** : 14.00 - 17.00 uur

N.B.: Dit tentamen bestaat uit zes opgaven. Licht alle door u uitgevoerde berekeningen toe, zodat duidelijk blijkt op welke manier u aan de antwoorden gekomen bent. Het gebruik van de Laplace-transformatie tabel is toegestaan.

1. Gegeven is het navolgende beginwaardeprobleem voor $y = y(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + 2y = e^{-t} & , \quad t > 0 , \\ y(0) = 3 . \end{cases}$$

Bepaal met behulp van de methode van variatie der constante de oplossing van dit beginwaardeprobleem voor $y = y(t)$.

2. Gegeven is het navolgende beginwaardeprobleem voor $y = y(t)$:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3y = \delta(t-2) & , \quad t > 0 , \\ y(0) = 1 , \\ \frac{dy}{dt}(0) = -1 . \end{cases}$$

Bepaal met behulp van de transformatie van Laplace de oplossing van dit beginwaardeprobleem voor $y = y(t)$.

3. Gegeven is het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2 , \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2 . \end{cases}$$

- Bepaal de algemene oplossing van dit stelsel differentiaalvergelijkingen.
- Schets in het fase-vlak (d.w.z. in het (x_1, x_2) -vlak) enkele integraalkrommen. Wat voor type evenwichtspunt is de oorsprong?

Tentamen Differentiaalvergelijkingen (wi2034TA) van vrijdag 9 januari 2004.

4. Gegeven is het stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + x^2 + 4y^2, \\ \frac{dy}{dt} = y - xy. \end{cases}$$

- Bepaal de evenwichtspunten van het stelsel differentiaalvergelijkingen.
- Bepaal de gelineariseerde stelsels differentiaalvergelijkingen in de omgeving van elk kritiek punt.
- Bepaal de eigenwaarden van de in **b.** gevonden stelsels differentiaalvergelijkingen. Welke conclusies kunt u trekken over het niet-lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen?
- Schets in het fase-vlak enkele baankrommen van het niet-lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen.

5. Gegeven is de functie f , die voldoet aan:

- $f(x) = x$ voor $0 \leq x \leq \pi$, en $f(x) = 0$ voor $\pi < x \leq 2\pi$,
- f is een even functie en
- f is 4π -periodiek in x , dat wil zeggen $f(x) = f(x + 4\pi)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

- Bepaal de Fourierreeks van f .
- Voor welke waarden van x convergeert die Fourierreeks, en naar welke waarden convergeert die Fourierreeks?

6. Bepaal met behulp van de methode van scheiding van variabelen de oplossing $u = u(x, t)$ van het beginrandwaardeprobleem:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 3 \sin x - \frac{5}{2} \sin(3x), & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

EINDE