TU Delft

Technische Universiteit Delft

Faculteit Elektrotechniek,
Wiskunde en Informatica
Opleiding Technische Wiskunde

Tentamen : Differentiaalvergelijkingen (WI2034TA)

Datum : vrijdag 31 oktober 2003

Tijd : 14.00 - 17.00 uur

N.B.: Dit tentamen bestaat uit zes opgaven. Licht alle door u uitgevoerde berekeningen toe, zodat duidelijk blijkt op welke manier u aan de antwoorden gekomen bent. Het gebruik van de Laplace-transformatie tabel is toegestaan.

1. Gegeven is het navolgende beginwaardeprobleem voor $y = y(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + 2y = e^{-t} \quad , \quad t > 0 \, , \\ \\ y(0) = -1 \, . \end{cases}$$

Bepaal met behulp van de methode van variatie der constante de oplossing van dit beginwaardeprobleem voor $y = y(t)$.

2. Gegeven is het navolgende beginwaardeprobleem voor $y = y(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + y = \delta(t-1) \quad , \quad t > 0 \, , \\ \\ y(0) = 1 \, , \\ \\ \dfrac{dy}{dt}(0) = -1 \, . \end{cases}$$

Bepaal met behulp van de transformatie van Laplace de oplossing van dit beginwaardeprobleem voor $y = y(t)$.

3. Gegeven is het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -3x_1 + \sqrt{2}\, x_2 \, , \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \sqrt{2}\, x_1 - 2x_2 \, . \end{cases}$$

a. Bepaal de algemene oplossing van dit stelsel differentiaalvergelijkingen.

b. Schets in het fase-vlak (d.w.z. in het (x_1, x_2)-vlak) enkele integraalkrommen. Wat voor type evenwichtspunt is de oorsprong?

Zie ommezijde

Tentamen Differentiaalvergelijkingen (wi2034TA) van vrijdag 31 oktober 2003.

4. Gegeven is het stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x + x^2 + y^2 \,, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} &= y - xy \,. \end{cases}$$

a. Bepaal de evenwichtspunten van het stelsel differentiaalvergelijkingen.

b. Bepaal de gelineariseerde stelsels differentiaalvergelijkingen in de omgeving van elk kritiek punt.

c. Bepaal de eigenwaarden van de in **b.** gevonden stelsels differentiaalvergelijkingen. Welke conclusies kunt u trekken over het niet-lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen?

d. Schets in het fase-vlak enkele baankrommen van het niet-lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen.

5. Gegeven is de functie f , die voldoet aan:

i) $f(x) = 2x - \pi$ voor $0 \leq x \leq \pi$, en $f(x) = 0$ voor $\pi < x \leq 2\pi$,

ii) f is een even functie en

iii) f is 4π-periodiek in x , dat wil zeggen $f(x) = f(x + 4\pi)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

a. Bepaal de Fourierreeks van f .

b. Voor welke waarden van x convergeert die Fourierreeks, en naar welke waarden convergeert die Fourrierreeks?

6. Bepaal met behulp van de methode van scheiding van variabelen de oplossing $u = u(x,t)$ van het beginrandwaardeprobleem:

$$\begin{cases} u_{xx} &= u_t \,, & 0 < x < \pi \,, \quad t > 0 \,, \\[1ex] u(x,0) &= \sin x - \frac{1}{2}\sin(3x) \,, & 0 < x < \pi \,, \\[1ex] u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \,, & t \geq 0 \,. \end{cases}$$

EINDE