TU Delft

Technische Universiteit Delft

Faculteit Informatietechnologie en Systemen
Opleiding Technische Wiskunde

Tentamen Differentiaalvergelijkingen (wi2034TA)

donderdag 24 januari 2002

14.00 - 17.00 uur

N.B.: Dit tentamen bestaat uit zes opgaven. Licht alle door u uitgevoerde berekeningen toe, zodat duidelijk blijkt op welke manier u aan de antwoorden gekomen bent. Het gebruik van de Laplace-transformatie tabel is toegestaan.

---

1. Gegeven is het navolgende beginwaardeprobleem voor $y = y(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + y = e^{-t} \quad , \quad t > 0 \, , \\ \\ y(0) = 3 \, . \end{cases}$$

Bepaal met behulp van de methode van variatie der constante de oplossing van dit beginwaardeprobleem voor $y = y(t)$.

2. Gegeven is het navolgende beginwaardeprobleem voor $y = y(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 3y = \delta(t-1) \quad , \quad t > 0 \, , \\ \\ y(0) = 1 \, , \\ \\ \dfrac{dy}{dt}(0) = 0 \, . \end{cases}$$

Bepaal met behulp van de transformatie van Laplace de oplossing van dit beginwaardeprobleem voor $y = y(t)$.

3. Gegeven is het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} & = & -2x_1 + x_2 \, , \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = & x_1 - 2x_2 \, . \end{cases}$$

a. Bepaal de algemene oplossing van dit stelsel differentiaalvergelijkingen.

b. Schets in het fase-vlak (d.w.z. in het (x_1, x_2)-vlak) enkele integraalkrommen. Wat voor type evenwichtspunt is de oorsprong?

4. Gegeven is het stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 2 - y \,, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} &= 4x^2 - y^2 \,. \end{cases}$$

   a. Bepaal de evenwichtspunten van het stelsel differentiaalvergelijkingen.

   b. Bepaal de gelineariseerde stelsels differentiaalvergelijkingen in de omgeving van elk kritiek punt.

   c. Bepaal de eigenwaarden van de in **b.** gevonden stelsels differentiaalvergelijkingen. Welke conclusies kunt u trekken over het niet-lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen?

   d. Schets in het fase-vlak enkele baankrommen van het niet-lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen.

5. Gegeven is de functie f , die voldoet aan:

   i) $f(x) = x$ voor $0 \le x \le \pi$, en $f(x) = 0$ voor $\pi < x \le 2\pi$,

   ii) f is een oneven functie en

   iii) f is 4π-periodiek in x , dat wil zeggen $f(x) = f(x + 4\pi)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

   a. Bepaal de Fourierreeks van f .

   b. Voor welke waarden van x convergeert die Fourierreeks, en naar welke waarden convergeert die Fourrierreeks?

6. Bepaal met behulp van de methode van scheiding van variabelen de oplossing $u = u(x,t)$ van het beginrandwaardeprobleem:

$$\begin{cases} u_{xx} &= u_t \,, & 0 < x < \pi \,,\ \ t > 0 \,, \\[2ex] u(x,0) &= \sin x - 3\sin(2x) \,, & 0 < x < \pi \,, \\[2ex] u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \,, & t \ge 0 \,. \end{cases}$$

EINDE

TABLE 6.2.1 Elementary Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Notes
1. 1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Ex. 4
2. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$	Sec. 6.1; Ex. 5
3. t^n; n = positive integer	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Prob. 27
4. t^p, $p > -1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Prob. 27
5. $\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Ex. 6
6. $\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1; Prob. 6
7. $\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$	Sec. 6.1; Prob. 8
8. $\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$	Sec. 6.1; Prob. 7
9. $e^{at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1; Prob. 13
10. $e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1; Prob. 14
11. $t^n e^{at}$, n = positive integer	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$	Sec. 6.1; Prob. 18
12. $u_c(t)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.3
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	Sec. 6.3
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	Sec. 6.3
15. $f(ct)$	$\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right), \quad c > 0$	Sec. 6.3; Prob. 19
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	Sec. 6.6
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}	Sec. 6.5
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	Sec. 6.2
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	Sec. 6.2; Prob. 28

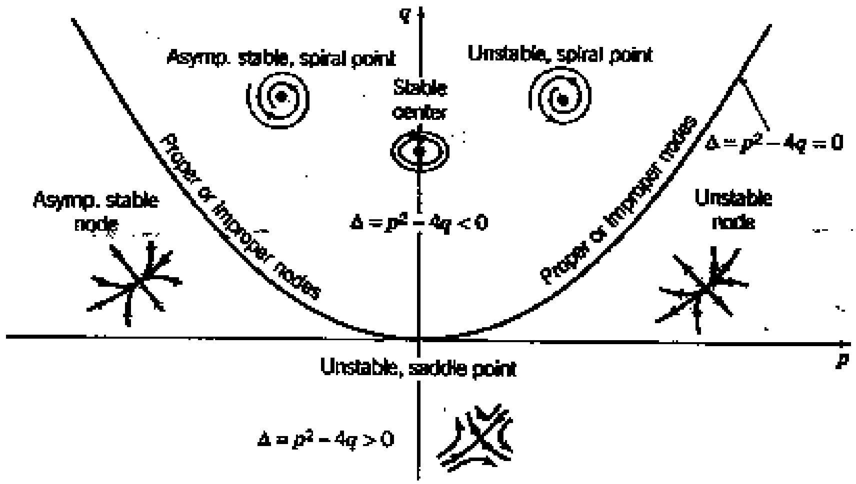

FIGURE 9.1.9 Stability diagram.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

$$p = a_{11} + a_{22} \quad , \quad q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad , \quad \Delta = p^2 - 4q .$$