TU Delft

Technische Universiteit Delft

Faculteit Informatietechnologie en Systemen
Opleiding Technische Wiskunde

Tentamen Differentiaalvergelijkingen (wi2034)

woensdag 2 februari 2000

14.00 - 17.00 uur

N.B. Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Licht alle door u uitgevoerde berekeningen toe, zodat duidelijk blijkt op welke manier u aan de antwoorden gekomen bent. Het gebruik van de Laplace-transformatie tabel en de tabel uit het analyseboek is toegestaan.

---

1. Gegeven is het navolgende beginwaardeprobleem voor $y = y(x)$:

$$\begin{cases} 2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \quad , \quad x > 1 \; , \\[2ex] y(1) = 2 \quad , \quad \dfrac{dy}{dx}(1) = 1 \; . \end{cases}$$

   a. Toon aan dat de 2e orde, niet-lineaire differentiaalvergelijking met behulp van de transformatie $v(x) = \frac{dy}{dx}$ overgaat in de 1e orde Bernoulli vergelijking: $\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v + \frac{1}{2x^2}v^3 = 0$.

   b. Toon aan dat de Bernoulli vergelijking met behulp van de transformatie $w(x) = \frac{1}{(v(x))^2}$ overgaat in een 1e orde, lineaire differentiaalvergelijking.

   c. Bepaal de oplossing van het gegeven beginwaardeprobleem voor $y(x)$.

2. Gegeven is de navolgende 2e orde, lineaire differentiaalvergelijking voor $y = y(t)$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3y = f(t) \; .$$

   a. Bepaal met behulp van de methode van onbepaalde coëfficiënten de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking indien $f(t) = \sin t$.

   b. Bepaal met behulp van de transformatie van Laplace de oplossing van de differentiaalvergelijking indien gegeven is dat $f(t) = \delta(t-1)$, en $y(0) = y'(0) = 0$.

Zie ommezijde.

3. Gegeven is de functie f , die voldoet aan:

   i) $f(x) = \pi - x$ voor $0 < x \leq \pi$, en $f(x) = 0$ voor $\pi < x \leq 2\pi$, $f(0) = 0$,

   ii) f is een even functie, en

   iii) f is 4π-periodiek in x , dat wil zeggen $f(x) = f(x + 4\pi)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

   a. Bepaal de Fourierreeks van f .

   b. Voor welke waarden van x convergeert die Fourierreeks, en naar welke waarden convergeert die Fourierreeks?

4. Bepaal met behulp van de methode van scheiding van variabelen de oplossing $u = u(x,t)$ van het beginrandwaardeprobleem:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t \,, & 0 < x < \pi \,, \quad t > 0 \,, \\ u(x,0) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x \,, & 0 < x < \pi \,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \,, & t \geq 0 \,. \end{cases}$$

5. Gegeven is het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 \,, \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = \frac{3}{2}x_1 - x_2 \,. \end{cases}$$

   a. Bepaal de algemene oplossing van dit stelsel differentiaalvergelijkingen.

   b. Schets in het $(x_1 \ , \ x_2)$-vlak de integraalkrommen. Wat voor type punt is de oorsprong?

EINDE