

Refresh Analyse 1 (2,3)

September 19, 2011

Definitie (Oneigenlijke integraal)

Stel $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is continu. Dan heet $\int_a^{\infty} f(x) dx$

Definitie (Oneigenlijke integraal)

Stel $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is continu. Dan heet $\int_a^{\infty} f(x) dx$ een **oneigenlijke integraal** (van de **eerste soort**).

Definitie (Oneigenlijke integraal)

Stel $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is continu. Dan heet $\int_a^{\infty} f(x) dx$ een **oneigenlijke integraal** (van de **eerste soort**).

De integraal heet **convergent** als $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ **bestaat**;

Definitie (Oneigenlijke integraal)

Stel $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is continu. Dan heet $\int_a^{\infty} f(x) dx$ een **oneigenlijke integraal** (van de **eerste soort**).

De integraal heet **convergent** als $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ **bestaat**; zo niet, dan heet de integraal **divergent**.

Definitie (Oneigenlijke integraal)

Stel $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is continu. Dan heet $\int_a^{\infty} f(x) dx$ een **oneigenlijke integraal** (van de **eerste soort**).

De integraal heet **convergent** als $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ **bestaat**; zo niet, dan heet de integraal **divergent**.

Opmerking

Er zijn ook oneigenlijke integralen van de **tweede soort**, maar die zullen we bij dit vak niet tegenkomen.

Voorbeeld

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx =$$

Voorbeeld

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\arctan x \right]_0^b$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\arctan x \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan b - \arctan 0 =\end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\arctan x \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan b - \arctan 0 = \frac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\arctan x \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan b - \arctan 0 = \frac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

kortweg

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\arctan x \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan b - \arctan 0 = \frac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

kortweg

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\arctan x \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}\pi$$

Partiële integratie

(afleiding)

$$\text{Uit } \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (\text{productregel})$$

Partiële integratie

(afleiding)

Uit $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (productregel)

volgt

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx$$

Partiële integratie

(afleiding)

Uit $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (productregel)

volgt

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx \\ &= \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx. \end{aligned}$$

Partiële integratie

(afleiding)

Uit $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (productregel)

volgt

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx \\ &= \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx. \end{aligned}$$

Herschikken geeft:

Partiële integratie

(afleiding)

Uit $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (productregel)

volgt

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx \\ &= \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx. \end{aligned}$$

Herschikken geeft:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Stelling (Partiële integratie)

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Stelling (Partiële integratie)

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Anders geschreven $(u = f(x), v = g(x), \text{ dus } dv = g'(x) dx)$:

Stelling (Partiële integratie)

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Anders geschreven $(u = f(x), v = g(x), \text{ dus } dv = g'(x) dx)$:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Stelling (Partiële integratie)

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Anders geschreven ($u = f(x)$, $v = g(x)$, dus $dv = g'(x) dx$):

$$\int u dv = uv - \int v du$$

'Met grenzen':

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Voorbeeld

$$\int x e^{ax} dx = \int x e^{ax} dx =$$

Voorbeeld

$$\int x e^{ax} dx = \int x e^{ax} dx = x \frac{1}{a} e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax} 1 dx$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\int x e^{ax} dx &= \int x e^{ax} dx = x \frac{1}{a} e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax} 1 dx \\ &= \frac{x e^{ax}}{a} - \int \frac{1}{a} e^{ax} dx =\end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\int x e^{ax} dx &= \int x e^{ax} dx = x \frac{1}{a} e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax} 1 dx \\ &= \frac{x e^{ax}}{a} - \int \frac{1}{a} e^{ax} dx = \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}\end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\int x e^{ax} dx &= \int x e^{ax} dx = x \frac{1}{a} e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax} 1 dx \\ &= \frac{x e^{ax}}{a} - \int \frac{1}{a} e^{ax} dx = \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}\end{aligned}$$

Dus, voor $s > 0$,

$$\int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \left[\frac{t e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty} =$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\int x e^{ax} dx &= \int x e^{ax} dx = x \frac{1}{a} e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax} 1 dx \\ &= \frac{x e^{ax}}{a} - \int \frac{1}{a} e^{ax} dx = \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}\end{aligned}$$

Dus, voor $s > 0$,

$$\int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \left[\frac{t e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty} = \dots =$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}\int x e^{ax} dx &= \int x e^{ax} dx = x \frac{1}{a} e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax} 1 dx \\ &= \frac{x e^{ax}}{a} - \int \frac{1}{a} e^{ax} dx = \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}\end{aligned}$$

Dus, voor $s > 0$,

$$\int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \left[\frac{t e^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty} = \dots = \frac{1}{s^2}$$

((korte!) afleiding)

Uit $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

((korte!) afleiding)

Uit $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

volgt

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))g'(x) dx$$

((korte!) afleiding)

Uit $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

volgt

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))g'(x) dx$$

Waarom dit de **substitutieregel** heet:

((korte!) afleiding)

Uit $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

volgt

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))g'(x) dx$$

Waarom dit de **substitutieregel** heet: in de integraal $\int f(g(x))g'(x) dx$, substitueer $g(x) = u$;

((korte!) afleiding)

Uit $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

volgt

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))g'(x) dx$$

Waarom dit de **substitutieregel** heet: in de integraal

$\int f(g(x))g'(x) dx$, substitueer $g(x) = u$;
dan automatisch $\underline{du} = d(g(x)) = \underline{g'(x) dx}$:

((korte!) afleiding)

Uit $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

volgt

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))g'(x) dx$$

Waarom dit de **substitutieregel** heet: in de integraal

$\int f(g(x))g'(x) dx$, substitueer $g(x) = u$;
dan automatisch $\underline{du} = d(g(x)) = \underline{g'(x) dx}$:

$$\int f(g(x)) \underline{g'(x) dx} =_{u=g(x)}$$

((korte!) afleiding)

Uit $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

volgt

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))g'(x) dx$$

Waarom dit de **substitutieregel** heet: in de integraal

$\int f(g(x))g'(x) dx$, substitueer $g(x) = u$;
dan automatisch $\underline{du} = d(g(x)) = \underline{g'(x) dx}$:

$$\int f(g(x)) \underline{g'(x) dx} =_{u=g(x)} \int f(u) \underline{du}$$

((korte!) afleiding)

Uit $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel)

volgt

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))g'(x) dx$$

Waarom dit de **substitutieregel** heet: in de integraal

$\int f(g(x))g'(x) dx$, substitueer $g(x) = u$;

dan automatisch $\underline{du} = d(g(x)) = \underline{g'(x) dx}$:

$$\int f(g(x)) \underline{g'(x) dx} =_{u=g(x)} \int f(u) \underline{du} = F(u) = F(g(x)) (+C)$$

waarin F staat voor een primitieve van f .

Stelling (Substitutieregel 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

Stelling (Substitutieregel 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \left[F(u) \right]_{g(a)}^{g(b)}$$

Stelling (Substitutieregel 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \left[F(u) \right]_{g(a)}^{g(b)}$$

Voorbeeld

$$\int xe^{x^2} dx. \quad \text{Stel } u = x^2$$

Stelling (Substitutieregel 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \left[F(u) \right]_{g(a)}^{g(b)}$$

Voorbeeld

$$\int xe^{x^2} dx. \quad \text{Stel } u = x^2, \text{ dan } du = 2x dx$$

Stelling (Substitutieregel 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \left[F(u) \right]_{g(a)}^{g(b)}$$

Voorbeeld

$\int xe^{x^2} dx$. Stel $u = x^2$, dan $du = 2x dx$, dus $x dx = \frac{1}{2} du$.

Substitutie geeft

$$\int xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} x dx$$

Stelling (Substitutieregels 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \left[F(u) \right]_{g(a)}^{g(b)}$$

Voorbeeld

$\int xe^{x^2} dx$. Stel $u = x^2$, dan $du = 2x dx$, dus $x dx = \frac{1}{2} du$.

Substitutie geeft

$$\int xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} x dx = \int e^u \frac{1}{2} du$$

Stelling (Substitutieregels 'met grenzen')

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \left[F(u) \right]_{g(a)}^{g(b)}$$

Voorbeeld

$\int xe^{x^2} dx$. Stel $u = x^2$, dan $du = 2x dx$, dus $x dx = \frac{1}{2} du$.

Substitutie geeft

$$\int xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} x dx = \int e^u \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} e^u = \frac{1}{2} e^{x^2} (+C)$$