Opgave (Stewart 14.5 49)

Toon aan dat elke functie van de vorm

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

een oplossing is van de (golf)vergelijking

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad !!!!$$

Opgave (Stewart 14.5 49)

Toon aan dat elke functie van de vorm

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

een oplossing is van de (golf)vergelijking

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad !!!!$$

Toon verder aan dat de golfvergelijking na de substitutie

$$u = x + at, \quad v = x - at$$

overgaat in de vergelijking $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$,

en leid daaruit af dat de genoemde oplossingen de **enige** oplossingen zijn.

Opgave (14.5 49 (vervolg))

Toon verder aan dat de golfvergelijking $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ na de substitutie $\quad u = x + at, \quad v = x - at$

overgaat in de vergelijking $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$

Opgave (14.5 49 (vervolg))

Toon verder aan dat de golfvergelijking $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ na de substitutie $\quad u = x + at, \quad v = x - at$

overgaat in de vergelijking $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$

Differentieer $\; z = z(u, v) = z(u(x,t), v(x,t))$

met de kettingregel:

Opgave (14.5 49 (vervolg))

Toon verder aan dat de golfvergelijking $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ na de substitutie $u = x + at, \quad v = x - at$

overgaat in de vergelijking $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$

Differentieer $z = z(u, v) = z(u(x, t), v(x, t))$

met de kettingregel: $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot a + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot (-a)$

Opgave (14.5 49 (vervolg))

Toon verder aan dat de golfvergelijking $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ na de substitutie $\quad u = x + at, \quad v = x - at$

overgaat in de vergelijking $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$

Differentieer $\quad z = z(u, v) = z(u(x,t), v(x,t))$

met de kettingregel: $\quad \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot a + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot (-a)$

en nog een keer

Opgave (14.5 49 (vervolg))

Toon verder aan dat de golfvergelijking $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ na de substitutie $\quad u = x + at, \quad v = x - at$

overgaat in de vergelijking $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$

Differentieer $\quad z = z(u, v) = z(u(x,t), v(x,t))$

met de kettingregel: $\quad \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot a + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot (-a)$

en nog een keer

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot a + \right.$$

Opgave (14.5 49 (vervolg))

Toon verder aan dat de golfvergelijking $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ na de substitutie $u = x + at, \quad v = x - at$

overgaat in de vergelijking $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$

Differentieer $z = z(u, v) = z(u(x, t), v(x, t))$

met de kettingregel: $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot a + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot (-a)$

en nog een keer

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot a + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot (-a)\right]$$

Opgave (14.5 49 (vervolg))

Toon verder aan dat de golfvergelijking $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ na de substitutie $\quad u = x + at, \quad v = x - at$

overgaat in de vergelijking $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$

Differentieer $\ z = z(u, v) = z(u(x,t), v(x,t))$

met de kettingregel: $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot a + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot (-a)$

en nog een keer

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot a + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot (-a)\right] \cdot a + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot a + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot (-a)\right] \cdot (-a)$$

$$=$$

Opgave (14.5 49 (vervolg))

Toon verder aan dat de golfvergelijking $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ na de substitutie $\quad u = x + at, \quad v = x - at$

overgaat in de vergelijking $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$

Differentieer $\ z = z(u, v) = z(u(x,t), v(x,t))$

met de kettingregel: $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot a + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot (-a)$

en nog een keer

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot a + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot (-a)\right] \cdot a + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot a + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot (-a)\right] \cdot (-a) \\ &= a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\end{aligned}$$

Opgave (14.5 49 (vervolg))

Gevonden: $$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Opgave (14.5 49 (vervolg))

Gevonden: $$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Net zo: $$\frac{\partial z^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Opgave (14.5 49 (vervolg))

Gevonden: $$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Net zo: $$\frac{\partial z^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Substitutie in de golfvergelijkig: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$:

Opgave (14.5 49 (vervolg))

Gevonden: $$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Net zo: $$\frac{\partial z^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Substitutie in de golfvergelijkig: $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$:

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

Opgave (14.5 49 (vervolg))

Gevonden: $$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Net zo: $$\frac{\partial z^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Substitutie in de golfvergelijkig: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$:

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

dit reduceert tot $$-2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$$

Opgave (14.5 49 (vervolg))

Gevonden: $$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Net zo: $$\frac{\partial z^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Substitutie in de golfvergelijkig: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$:

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

dit reduceert tot $$-2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$$

Dus inderdaad tot $$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

Andere manier om de golfvergelijking op te lossen

(Vrij) eenvoudig aan te tonen:

de algemene oplossing van $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$

Andere manier om de golfvergelijking op te lossen

(Vrij) eenvoudig aan te tonen:

de algemene oplossing van $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$

is $z = g(u) + h(v)$

$(+C$, maar die kun je in g of h onderbrengen)

Andere manier om de golfvergelijking op te lossen

(Vrij) eenvoudig aan te tonen:

de algemene oplossing van $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$

is $z = g(u) + h(v)$

($+C$, maar die kun je in g of h onderbrengen)

Dat geeft als algemene oplossing voor $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

een functie

$$u(x, t) = g(x + at) + h(x - at)$$

Andere manier om de golfvergelijking op te lossen

$$
\begin{aligned}
\text{(I)} \quad & u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \ t \ge 0 \\
\text{(II)} \quad & u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad 0 \le t, \\
\text{(III)} \quad & u(x,0) = f(x), \ u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le L \\
\text{(of (III'))} \quad & u(x,0) = 0), \ u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \le x \le L)
\end{aligned}
$$

(Noodzakelijke) aanname: $f(0) = f(L) = 0$.

We zoeken een oplossing in de vorm
$u(x,t) = g(x+at) + h(x-at)$.

Andere manier om de golfvergelijking op te lossen

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad & u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, \; t \geq 0 \\
\text{(II)} \quad & u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad 0 \leq t, \\
\text{(III)} \quad & u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \\
\text{(of (III'))} \quad & u(x,0) = 0), \; u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L)
\end{aligned}$$

(Noodzakelijke) aanname: $f(0) = f(L) = 0$.

We zoeken een oplossing in de vorm
$u(x,t) = g(x+at) + h(x-at)$.

Om aan (III) te voldoen:
$$\begin{aligned}
g(x) + h(x) &= f(x) \\
ag'(x) - ah'(x) &= 0
\end{aligned}$$

Andere manier om de golfvergelijking op te lossen

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad & u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \ t \ge 0 \\
\text{(II)} \quad & u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad 0 \le t, \\
\text{(III)} \quad & u(x,0) = f(x), \ u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le L \\
\text{(of (III'))} \quad & u(x,0) = 0), \ u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \le x \le L)
\end{aligned}$$

(Noodzakelijke) aanname: $f(0) = f(L) = 0$.

We zoeken een oplossing in de vorm
$u(x,t) = g(x+at) + h(x-at)$.

Om aan (III) te voldoen:
$$\begin{aligned}
g(x) + h(x) &= f(x) \\
ag'(x) - ah'(x) &= 0
\end{aligned}$$

De tweede vgl levert: $g(x) = h(x) + C$,

Andere manier om de golfvergelijking op te lossen

$$
\begin{aligned}
\text{(I)} \quad & u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \; t \ge 0 \\
\text{(II)} \quad & u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad 0 \le t, \\
\text{(III)} \quad & u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le L \\
\text{(of (III'))} \quad & u(x,0) = 0), \; u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \le x \le L)
\end{aligned}
$$

(Noodzakelijke) aanname: $f(0) = f(L) = 0$.

We zoeken een oplossing in de vorm
$u(x,t) = g(x + at) + h(x - at)$.

Om aan (III) te voldoen:
$$
\begin{aligned}
g(x) + h(x) \quad &= f(x) \\
ag'(x) - ah'(x) \quad &= 0
\end{aligned}
$$

De tweede vgl levert: $g(x) = h(x) + C$, en dit ingevuld in de eerste geeft (voor $C = 0$): $g(x) = h(x) = \frac{1}{2} f(x)$,

Andere manier om de golfvergelijking op te lossen

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} && u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \ t \ge 0 \\
&\text{(II)} && u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad 0 \le t, \\
&\text{(III)} && u(x,0) = f(x), \ u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le L \\
&\text{(of (III'))} && u(x,0) = 0), \ u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \le x \le L)
\end{aligned}$$

(Noodzakelijke) aanname: $f(0) = f(L) = 0$.

We zoeken een oplossing in de vorm
$u(x,t) = g(x+at) + h(x-at)$.

Om aan (III) te voldoen:
$$\begin{aligned} g(x) + h(x) &= f(x) \\ ag'(x) - ah'(x) &= 0 \end{aligned}$$

De tweede vgl levert: $g(x) = h(x) + C$, en dit ingevuld in de eerste geeft (voor $C = 0$): $g(x) = h(x) = \frac{1}{2} f(x)$, en daarmee de

oplossing

Andere manier om de golfvergelijking op te lossen

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)} && u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \;\; t \ge 0 \\
&\text{(II)} && u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad 0 \le t, \\
&\text{(III)} && u(x,0) = f(x), \;\; u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le L \\
&\text{(of (III')} && u(x,0) = 0), \;\; u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \le x \le L)
\end{aligned}
$$

(Noodzakelijke) aanname: $f(0) = f(L) = 0$.

We zoeken een oplossing in de vorm
$u(x,t) = g(x+at) + h(x-at)$.

Om aan (III) te voldoen:
$$
\begin{aligned}
g(x) + h(x) \quad &= f(x) \\
ag'(x) - ah'(x) \quad &= 0
\end{aligned}
$$

De tweede vgl levert: $g(x) = h(x) + C$, en dit ingevuld in de eerste geeft (voor $C = 0$): $g(x) = h(x) = \frac{1}{2} f(x)$, en daarmee de

oplossing $\quad u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+at) + f(x-at)\big)$.