Partiële differentiaalvergelijkingen

("De grote drie")

warmtevergelijking

Partiële differentiaalvergelijkingen

("De grote drie")

warmtevergelijking $$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u = u(x,t)$$

Partiële differentiaalvergelijkingen

("De grote drie")

warmtevergelijking $$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u = u(x,t)$$

golfvergelijking

Partiële differentiaalvergelijkingen

("De grote drie")

warmtevergelijking $$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u = u(x,t)$$

golfvergelijking $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad u = u(x,t)$$

Partiële differentiaalvergelijkingen

("De grote drie")

warmtevergelijking $$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u = u(x,t)$$

golfvergelijking $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad u = u(x,t)$$

potentiaalvergelijking

Partiële differentiaalvergelijkingen

("De grote drie")

warmtevergelijking $$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u = u(x,t)$$

golfvergelijking $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad u = u(x,t)$$

potentiaalvergelijking $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad u = u(x,y)$$

Oplosmethode, de grote lijn

(Driestappenplan)

Oplosmethode, de grote lijn

(Driestappenplan)

1. Variabelen scheiden geeft randwaardeprobleem

Oplosmethode, de grote lijn

(Driestappenplan)

1. Variabelen scheiden geeft randwaardeprobleem
2. Randwaardeprobleem oplossen geeft 'bouwstenen' $u_k(x,t)$ (of $u_k(x,y)$)

Oplosmethode, de grote lijn

(Driestappenplan)

1. Variabelen scheiden geeft randwaardeprobleem
2. Randwaardeprobleem oplossen geeft 'bouwstenen' $u_k(x,t)$ (of $u_k(x,y)$)
3. Om oplossingen te vinden die voldoet aan gestelde begin- en/of randvoorwaarden:
   construeer de gezochte oplossing $u(x,t) = \sum_k A_k\, u_k(x,t)$.

Oplosmethode, de grote lijn

(Driestappenplan)

1. Variabelen scheiden geeft randwaardeprobleem
2. Randwaardeprobleem oplossen geeft 'bouwstenen' $u_k(x,t)$ (of $u_k(x,y)$)
3. Om oplossingen te vinden die voldoet aan gestelde begin- en/of randvoorwaarden:
   construeer de gezochte oplossing $u(x,t) = \sum_k A_k\, u_k(x,t)$.

   Vaak: schrijf een functie $f(x)$ in de vorm

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Oplosmethode, de grote lijn

(Driestappenplan)

1. Variabelen scheiden geeft randwaardeprobleem

2. Randwaardeprobleem oplossen geeft 'bouwstenen' $u_k(x,t)$ (of $u_k(x,y)$)

3. Om oplossingen te vinden die voldoet aan gestelde begin- en/of randvoorwaarden:
   construeer de gezochte oplossing $u(x,t) = \sum_k A_k\, u_k(x,t)$.

   Vaak: schrijf een functie $f(x)$ in de vorm

   $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos\left(\tfrac{k\pi}{L}x\right) \quad (\text{of } \sum_{k=0}^{n} b_k \sin\left(\tfrac{k\pi}{L}x\right)$$

To get started . . . . .

1. Bereken alle oplossingen van het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

To get started .....

1. Bereken alle oplossingen van het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

2. Hetzelfde voor $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

To get started . . . . .

1. Bereken alle oplossingen van het randwaardeprobleem
$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$
2. Hetzelfde voor $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$
3. Bereken alle $\lambda \in \mathbb{R}$ waarvoor het probleem
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$
niet-triviale oplossingen heeft.

   Hoe zou je in dit geval de algemene oplossing opschrijven?

1. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$

1. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$

   Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

1. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$

   Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

   Karakteristieke vergelijking: $r^2 + 4 = 0 \longrightarrow r =$

1. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$

   Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

   Karakteristieke vergelijking: $r^2 + 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2i,$

1. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$

   Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

   Karakteristieke vergelijking: $r^2 + 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2i$,

   geeft oplossingen $y_1 =$

1. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$

   Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

   Karakteristieke vergelijking: $r^2 + 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2i$,

   geeft oplossingen $y_1 = \cos(2x)$, $y_2 = \sin(2x)$,

1. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$

   Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

   Karakteristieke vergelijking: $r^2 + 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2i$,

   geeft oplossingen $y_1 = \cos(2x)$, $y_2 = \sin(2x)$,

   dus algemene oplossing: $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$.

1. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$

   Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

   Karakteristieke vergelijking: $r^2 + 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2i$,

   geeft oplossingen $y_1 = \cos(2x)$, $y_2 = \sin(2x)$,

   dus algemene oplossing: $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$.

   Randwaarden inbouwen: $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$,

1. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$

   Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

   Karakteristieke vergelijking: $r^2 + 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2i$,

   geeft oplossingen $y_1 = \cos(2x)$, $y_2 = \sin(2x)$,

   dus algemene oplossing: $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$.

   Randwaarden inbouwen: $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$,
   $y(\pi) = 0 \Rightarrow C_2$ is vrij!

1. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$

   Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

   Karakteristieke vergelijking: $r^2 + 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2i$,

   geeft oplossingen $y_1 = \cos(2x)$, $y_2 = \sin(2x)$,

   dus algemene oplossing: $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$.

   Randwaarden inbouwen: $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$,
   $y(\pi) = 0 \Rightarrow C_2$ is vrij!

   Het antwoord: $y(x) = C_2 \sin(2x)$.

2. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

2. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \longrightarrow r =$

2. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2,$

2. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2,$

geeft oplossingen $y_1 =$

2. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2$,

geeft oplossingen $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$,

2. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2$,

geeft oplossingen $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$,

dus algemene oplossing: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

2. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2$,

geeft oplossingen $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$,

dus algemene oplossing: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

Randwaarden inbouwen:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ \end{cases}$$

2. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2$,

geeft oplossingen $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$,

dus algemene oplossing: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

Randwaarden inbouwen:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^4 + C_2 e^{-4} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

2. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2$,

geeft oplossingen $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$,

dus algemene oplossing: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

Randwaarden inbouwen:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^4 + C_2 e^{-4} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

2. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2$,

geeft oplossingen $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$,

dus algemene oplossing: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

Randwaarden inbouwen:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^4 + C_2 e^{-4} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

De enige oplossing: $y(x) = 0$ (de 'triviale' oplossing)

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

Drie gevallen: (1) $\lambda < 0$, (2) $\lambda = 0$, (3) $\lambda > 0$.

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

Drie gevallen: (1) $\lambda < 0$, (2) $\lambda = 0$, (3) $\lambda > 0$.

geval 1 Schrijf $\lambda = -\omega^2$.

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

Drie gevallen: (1) $\lambda < 0$, (2) $\lambda = 0$, (3) $\lambda > 0$.

geval 1 Schrijf $\lambda = -\omega^2$. Dan $r_{1,2} = \pm\omega$.

Algemene oplossing van de DV: $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$.

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

Drie gevallen: (1) $\lambda < 0$, (2) $\lambda = 0$, (3) $\lambda > 0$.

geval 1 Schrijf $\lambda = -\omega^2$. Dan $r_{1,2} = \pm\omega$.

Algemene oplossing van de DV: $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$.

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = y(2) = 0$:

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

Drie gevallen: (1) $\lambda < 0$, (2) $\lambda = 0$, (3) $\lambda > 0$.

geval 1 Schrijf $\lambda = -\omega^2$. Dan $r_{1,2} = \pm\omega$.

Algemene oplossing van de DV: $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$.

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = y(2) = 0$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ \end{cases}$$

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

Drie gevallen: (1) $\lambda < 0$, (2) $\lambda = 0$, (3) $\lambda > 0$.

geval 1 Schrijf $\lambda = -\omega^2$. Dan $r_{1,2} = \pm\omega$.

Algemene oplossing van de DV: $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$.

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = y(2) = 0$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{2\omega} + C_2 e^{-2\omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

Drie gevallen: (1) $\lambda < 0$, (2) $\lambda = 0$, (3) $\lambda > 0$.

geval 1 Schrijf $\lambda = -\omega^2$. Dan $r_{1,2} = \pm\omega$.

Algemene oplossing van de DV: $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$.

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = y(2) = 0$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{2\omega} + C_2 e^{-2\omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

Drie gevallen: (1) $\lambda < 0$, (2) $\lambda = 0$, (3) $\lambda > 0$.

geval 1 Schrijf $\lambda = -\omega^2$. Dan $r_{1,2} = \pm\omega$.

Algemene oplossing van de DV: $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$.

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = y(2) = 0$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{2\omega} + C_2 e^{-2\omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0$$

De enige oplossing: $y(x) = 0$ (de 'triviale' oplossing)

3. Bereken alle oplossingen van $\left\{ \begin{array}{l} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{array} \right.$

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$:

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1 x + C_2$.

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

geval 2 $\lambda = 0.$

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1 x + C_2.$

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

geval 2 $\lambda = 0.$

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1 x + C_2.$

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:

(weer) $y(x) = 0.$

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1 x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:
(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1 x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:
(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2 y = 0$:

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1 x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:
(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2 y = 0$:

$$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x).$$

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1 x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:
(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2 y = 0$:
$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$.

Oplossing die voldoen aan $y(0) = 0$: $y(x) =$

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

geval 2 $\lambda = 0.$

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1 x + C_2.$

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:
(weer) $y(x) = 0.$

geval 3 $\lambda > 0.$ Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2 y = 0$:
$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x).$

Oplossing die voldoen aan $y(0) = 0$: $y(x) = C_2 \sin(\omega x).$

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1 x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:
(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2 y = 0$:

$$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x).$$

Oplossing die voldoen aan $y(0) = 0$: $y(x) = C_2 \sin(\omega x)$.

Om te voldoen aan $y(2) = 0$: $C_2 \sin(2\omega) = 0$.

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

<u>**geval 2**</u> $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1 x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:
(weer) $y(x) = 0$.

<u>**geval 3**</u> $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2 y = 0$:
$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$.

Oplossing die voldoen aan $y(0) = 0$: $y(x) = C_2 \sin(\omega x)$.

Om te voldoen aan $y(2) = 0$: $C_2 \sin(2\omega) = 0$.

Nu zijn er **wel** niet-triviale oplossingen als: $\sin(2\omega) = 0$,

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

geval 2 $\lambda = 0.$

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1 x + C_2.$

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:
(weer) $y(x) = 0.$

geval 3 $\lambda > 0.$ Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2 y = 0$:
$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x).$

Oplossing die voldoen aan $y(0) = 0$: $y(x) = C_2 \sin(\omega x).$

Om te voldoen aan $y(2) = 0$: $C_2 \sin(2\omega) = 0.$

Nu zijn er **wel** niet-triviale oplossingen als: $\sin(2\omega) = 0,$
dus als: $\omega =$

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1 x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:
(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2 y = 0$:
$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$.

Oplossing die voldoen aan $y(0) = 0$: $y(x) = C_2 \sin(\omega x)$.

Om te voldoen aan $y(2) = 0$: $C_2 \sin(2\omega) = 0$.

Nu zijn er **wel** niet-triviale oplossingen als: $\sin(2\omega) = 0$,
dus als: $\omega = \frac{k\pi}{2}$.

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1 x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:
(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2 y = 0$:
$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$.

Oplossing die voldoen aan $y(0) = 0$: $y(x) = C_2 \sin(\omega x)$.

Om te voldoen aan $y(2) = 0$: $C_2 \sin(2\omega) = 0$.

Nu zijn er **wel** niet-triviale oplossingen als: $\sin(2\omega) = 0$,
dus als: $\omega = \frac{k\pi}{2}$. **Conclusie**:

3. Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1 x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:
(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2 y = 0$:
$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$.

Oplossing die voldoen aan $y(0) = 0$: $y(x) = C_2 \sin(\omega x)$.

Om te voldoen aan $y(2) = 0$: $C_2 \sin(2\omega) = 0$.

Nu zijn er **wel** niet-triviale oplossingen als: $\sin(2\omega) = 0$,
dus als: $\omega = \frac{k\pi}{2}$. **Conclusie**:

$\lambda = \frac{k^2\pi^2}{4}$ geeft de oplossingen $y_k(x) = A_k \sin\left(\frac{k\pi}{2} x\right)$.

(Een beetje goniometrie)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha$$

(Een beetje goniometrie)

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\beta\,\sin\alpha
\end{aligned}
$$

(Een beetje goniometrie)

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \cos\alpha \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \sin\alpha \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =
\end{aligned}$$

(Een beetje goniometrie)

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\beta\,\sin\alpha \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha
\end{aligned}$$

(Een beetje goniometrie)

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\beta\,\sin\alpha \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

Gevolgen: $\sin\alpha\,\cos\beta \;=\; \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\Big)$

(Een beetje goniometrie)

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\beta\,\sin\alpha \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha
\end{aligned}$$

Gevolgen:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\,\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\Big) \\
\sin\alpha\,\sin\beta &= \tfrac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\Big)
\end{aligned}$$

(Een beetje goniometrie)

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\ \cos\alpha \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\beta\ \sin\alpha \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha
\end{aligned}$$

Gevolgen:
$$\begin{aligned}
\sin\alpha\ \cos\beta &= \tfrac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\Big) \\
\sin\alpha\ \sin\beta &= \tfrac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\Big) \\
\cos\alpha\ \cos\beta &= \tfrac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\Big)
\end{aligned}$$

(Een beetje goniometrie)

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\beta\,\sin\alpha \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha
\end{aligned}$$

Gevolgen:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\,\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\Big) \\
\sin\alpha\,\sin\beta &= \tfrac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\Big) \\
\cos\alpha\,\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\Big) \\
\sin^2\alpha &= \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))
\end{aligned}$$

(Een beetje goniometrie)

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\beta\,\sin\alpha \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \end{aligned}$$

Gevolgen:

$$\begin{aligned} \sin\alpha\,\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\Big) \\ \sin\alpha\,\sin\beta &= \tfrac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\Big) \\ \cos\alpha\,\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\Big) \\ \sin^2\alpha &= \tfrac{1}{2}(1-\cos(2\alpha)) \\ \cos^2\alpha &= \tfrac{1}{2}(1+\cos(2\alpha)) \end{aligned}$$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx$$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\Big(\sin(mx+nx)+\sin(mx-nx)\Big)\,dx$$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\,\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\Big(\sin(mx+nx)+\sin(mx-nx)\Big)\;dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\Big(\sin(mx+nx)+\sin(mx-nx)\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0, \text{ want } \cos((m\pm n)\pi) = \cos(-(m\pm n)\pi)
\end{aligned}$$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\Big(\sin(mx+nx)+\sin(mx-nx)\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0, \ \text{ want } \ \cos((m\pm n)\pi) = \cos(-(m\pm n)\pi)
\end{aligned}$$

en er komt ook 0 uit als $m = n$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\Big(\sin(mx+nx)+\sin(mx-nx)\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0, \text{ want } \cos((m\pm n)\pi) = \cos(-(m\pm n)\pi)
\end{aligned}$$

en er komt ook 0 uit als $m = n$

Net zo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx =$$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\Big(\sin(mx+nx)+\sin(mx-nx)\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0, \ \text{want} \ \cos((m\pm n)\pi) = \cos(-(m\pm n)\pi)
\end{aligned}$$

en er komt ook 0 uit als $m = n$

Net zo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{als } m \neq n \\ & \end{cases}$$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\,\cos(nx)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\Big(\sin(mx+nx)+\sin(mx-nx)\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0, \ \ \text{want} \ \ \cos((m\pm n)\pi) = \cos(-(m\pm n)\pi)
\end{aligned}$$

en er komt ook 0 uit als $m = n$

Net zo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\,\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{als } \ m \neq n \\ \pi, & \text{als } \ m = n \neq 0 \end{cases}$$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\Big(\sin(mx+nx)+\sin(mx-nx)\Big)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0, \;\text{ want }\; \cos((m\pm n)\pi) = \cos(-(m\pm n)\pi)\end{aligned}$$

en er komt ook 0 uit als $m = n$

Net zo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{als } m \neq n \\ \pi, & \text{als } m = n \neq 0 \\ 2\pi, & \text{als } m = n = 0 \end{cases}$$

Definitie

De Fourier reeks van de functie $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

waarbij

Definitie

De Fourier reeks van de functie $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

waarbij

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

Fourier reeks

Definitie

De Fourier reeks van de functie $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

waarbij

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Fourier reeks

Definitie

De Fourier reeks van de functie $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

waarbij

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx, \quad n \geq 1 \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx, \quad n \geq 1
\end{aligned}$$

(Het achterliggende idee)

Opdat (mogelijkerwijs)

$$f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

op het interval $(-L, L)$,

(Het achterliggende idee)

Opdat (mogelijkerwijs)

$$f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

op het interval $(-L, L)$, zal moeten gelden

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx = \int_{-L}^{L} S(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx$$

(Het achterliggende idee)

Opdat (mogelijkerwijs)

$$f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

op het interval $(-L, L)$, zal moeten gelden

$$\int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \, dx = \int_{-L}^{L} S(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \, dx$$

en ook

$$\int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \, dx = \int_{-L}^{L} S(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \, dx$$

(Het achterliggende idee)

We willen $f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$

(Het achterliggende idee)

We willen $\quad f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$

Aangezien $\quad \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx = 0$

(Het achterliggende idee)

We willen $\quad f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$

Aangezien $\quad \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx = 0$

en $\quad \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx =$

(Het achterliggende idee)

We willen $\quad f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$

Aangezien $\quad \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx = 0$

en $\quad \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{als } m \neq n \\ & \end{cases}$

(Het achterliggende idee)

We willen $\quad f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$

Aangezien $\quad \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx = 0$

en $\quad \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{als } m \neq n \\ L, & \text{als } m = n \neq 0 \end{cases}$

(Het achterliggende idee)

We willen $\quad f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$

Aangezien $\quad \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx = 0$

en $\quad \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{als } m \neq n \\ L, & \text{als } m = n \neq 0 \\ 2L, & \text{als } m = n = 0 \end{cases}$

(Het achterliggende idee)

We willen $\quad f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$

Aangezien $\quad \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx = 0$

en $\quad \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{als } m \neq n \\ L, & \text{als } m = n \neq 0 \\ 2L, & \text{als } m = n = 0 \end{cases}$

volgt

$$\int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx = \int_{-L}^{L} S(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx = b_m \cdot L$$

(Het achterliggende idee)

We willen $f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$.

Aangezien $\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx = 0$

en $\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{als } m \neq n \\ L, & \text{als } m = n \neq 0 \\ 2L, & \text{als } m = n = 0 \end{cases}$

volgt

$$\int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx = \int_{-L}^{L} S(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\, dx = b_m \cdot L$$

En hieruit volgt direct de formule voor b_m.

Voorbeelden

Voorbeeld (simpeler kan het haast niet)

Bereken de fourierreeks van de functie f, periodiek met periode 2π

Voorbeelden

Voorbeeld (simpeler kan het haast niet)

Bereken de fourierreeks van de functie f, periodiek met periode 2π

met $f(x) = 1$, als $0 \leq x \leq \pi$,

Voorbeelden

Voorbeeld (simpeler kan het haast niet)

Bereken de fourierreeks van de functie f, periodiek met periode 2π

met $f(x) = 1$, als $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) = 0$, als $\pi < x < 2\pi$.

Voorbeelden

Voorbeeld (simpeler kan het haast niet)

Bereken de fourierreeks van de functie f, periodiek met periode 2π

met $f(x) = 1$, als $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) = 0$, als $\pi < x < 2\pi$.

Voorbeeld (B & dP 10.2 20)

Bereken de fourierreeks van de functie f, periodiek met periode 2

Voorbeelden

Voorbeeld (simpeler kan het haast niet)

Bereken de fourierreeks van de functie f, periodiek met periode 2π

met $f(x) = 1$, als $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) = 0$, als $\pi < x < 2\pi$.

Voorbeeld (B & dP 10.2 20)

Bereken de fourierreeks van de functie f, periodiek met periode 2

met $f(x) = x$, als $-1 \leq x \leq 1$.

Convergentiestelling over Fourier reeksen

Stelling

Stel $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn stuksgewijs continu.

Convergentiestelling over Fourier reeksen

Stelling

Stel $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn stuksgewijs continu.

Stel

$$s_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

is de N-de partiële som van de Fourier reeks van f.

Convergentiestelling over Fourier reeksen

Stelling

Stel $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn stuksgewijs continu.

Stel

$$s_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

is de N-de partiële som van de Fourier reeks van f.

In punten x_0 waar f continu is geldt

$$\lim_{N\to\infty} s_N(x_0) = f(x_0).$$

Convergentiestelling over Fourier reeksen

Stelling

Stel $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn stuksgewijs continu.

Stel

$$s_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

is de N-de partiële som van de Fourier reeks van f.

In punten x_0 waar f continu is geldt

$$\lim_{N\to\infty} s_N(x_0) = f(x_0).$$

In punten x_0 waar f niet continu is geldt

$$\lim_{N\to\infty} s_N(x) = \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$$

Convergentiestelling over Fourier reeksen

Stelling

Stel $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn stuksgewijs continu.

Stel

$$s_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

is de N-de partiële som van de Fourier reeks van f.

In punten x_0 waar f continu is geldt

$$\lim_{N\to\infty} s_N(x_0) = f(x_0).$$

In punten x_0 waar f niet continu is geldt

$$\lim_{N\to\infty} s_N(x) = \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} = \frac{\lim_{x\downarrow x_0} f(x) + \lim_{x\uparrow x_0} f(x)}{2}$$

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$, en periodiek met periode $2L$,

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$, en periodiek met periode $2L$, dan $\lim_{N \to \infty} s_N(x) = f(x)$ overal,

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$, en periodiek met periode $2L$, dan
$\lim_{N\to\infty} s_N(x) = f(x)$ overal,
behalve eventueel in de eindpunten $\pm L$.

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$, en periodiek met periode $2L$, dan $\lim_{N\to\infty} s_N(x) = f(x)$ overal,
behalve eventueel in de eindpunten $\pm L$.

Als ook nog $f(L+) = f(L-)$,

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$, en periodiek met periode $2L$, dan $\lim_{N\to\infty} s_N(x) = f(x)$ overal,
behalve eventueel in de eindpunten $\pm L$.

Als ook nog $f(L+) = f(L-)$, dan ook $\lim_{N\to\infty} s_N(x) = f(x)$ voor $x = L \pmod{2L}$.

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$, en periodiek met periode $2L$, dan $\lim\limits_{N\to\infty} s_N(x) = f(x)$ overal,
behalve eventueel in de eindpunten $\pm L$.

Als ook nog $f(L+) = f(L-)$, dan ook $\lim\limits_{N\to\infty} s_N(x) = f(x)$ voor $x = L \pmod{2L}$.

Voorbeeld

- Opgave 10.2 20. $f(x) = x, \ \ -1 \le x \le 1.$

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$, en periodiek met periode $2L$, dan $\lim_{N\to\infty} s_N(x) = f(x)$ overal,

behalve eventueel in de eindpunten $\pm L$.

Als ook nog $f(L+) = f(L-)$, dan ook $\lim_{N\to\infty} s_N(x) = f(x)$ voor $x = L \pmod{2L}$.

Voorbeeld

- Opgave 10.2 20. $f(x) = x, \quad -1 \leq x \leq 1$.

  Hier geen 'aansluiting in de eindpunten'.

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$, en periodiek met periode $2L$, dan $\lim_{N\to\infty} s_N(x) = f(x)$ overal,
behalve eventueel in de eindpunten $\pm L$.

Als ook nog $f(L+) = f(L-)$, dan ook $\lim_{N\to\infty} s_N(x) = f(x)$ voor $x = L \pmod{2L}$.

Voorbeeld

- Opgave 10.2 20. $f(x) = x, \;\; -1 \leq x \leq 1.$
  Hier geen 'aansluiting in de eindpunten'.
- Opgave 10.2 21. $f(x) = x^2/2, \;\; -2 \leq x \leq 2.$

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$, en periodiek met periode $2L$, dan $\lim\limits_{N\to\infty} s_N(x) = f(x)$ overal,
behalve eventueel in de eindpunten $\pm L$.

Als ook nog $f(L+) = f(L-)$, dan ook $\lim\limits_{N\to\infty} s_N(x) = f(x)$ voor $x = L \pmod{2L}$.

Voorbeeld

- Opgave 10.2 20. $f(x) = x, \ -1 \le x \le 1$.
  Hier geen 'aansluiting in de eindpunten'.
- Opgave 10.2 21. $f(x) = x^2/2, \ -2 \le x \le 2$.
  Hier wel 'aansluiting in de eindpunten'.

(Andere) convergentiestelling over Fourier reeksen

Stelling

Stel $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn stuksgewijs continu.

(Andere) convergentiestelling over Fourier reeksen

Stelling

Stel $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn stuksgewijs continu.

Stel

$$s_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

is de N-de partiële som van de Fourier reeks van f.

(Andere) convergentiestelling over Fourier reeksen

Stelling

Stel $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn stuksgewijs continu.

Stel

$$s_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

is de N-de partiële som van de Fourier reeks van f.

Er geldt:

$$\int_{-L}^{L} \left| f(x) - s_N(x) \right| \, dx = 0$$

(Andere) convergentiestelling over Fourier reeksen

Stelling

Stel $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn stuksgewijs continu.

Stel

$$s_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

is de N-de partiële som van de Fourier reeks van f.

Er geldt:

$$\int_{-L}^{L} \left| f(x) - s_N(x) \right| \, dx = 0$$

De partiële sommen s_N van de Fourier reeks van f naderen dus 'uniform' naar f