

Existentiestelling voor de eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (2.8.1)

Gegeven de DV met beginvoorwaarde

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (\text{BVP})$$

Existentiestelling voor de eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (2.8.1)

Gegeven de DV met beginvoorwaarde

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (\text{BVP})$$

Stel f en $\partial f / \partial y$ zijn continu op een omgeving van het punt (t_0, y_0) ,

Existentiestelling voor de eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (2.8.1)

Gegeven de DV met beginvoorwaarde

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (\text{BVP})$$

Stel f en $\partial f / \partial y$ zijn continu op een omgeving van het punt (t_0, y_0) , zeg op de rechthoek $|y - y_0| \leq a$, $|t - t_0| \leq b$.

Existentiestelling voor de eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (2.8.1)

Gegeven de DV met beginvoorwaarde

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (\text{BVP})$$

Stel f en $\partial f / \partial y$ zijn continu op een omgeving van het punt (t_0, y_0) , zeg op de rechthoek $|y - y_0| \leq a$, $|t - t_0| \leq b$.

Dan is er een $h > 0$ zodat het beginwaardeprobleem (BVP) op het interval $(t_0 - h, t_0 + h)$ een unieke oplossing heeft.

(het standaardvoorbeeld met *niet* een unieke oplossing)

$$y'(t) = f(t, y) = 3y^{2/3} = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

(het standaardvoorbeeld met *niet* een unieke oplossing)

$$y'(t) = f(t, y) = 3y^{2/3} = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

Twee *verschillende* oplossingen (op *elk* interval $(-h, h)$):

$$y_1(t) = 0,$$

(het standaardvoorbeeld met *niet* een unieke oplossing)

$$y'(t) = f(t, y) = 3y^{2/3} = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

Twee *verschillende* oplossingen (op *elk* interval $(-h, h)$):

$$y_1(t) = 0, \quad \text{en} \quad y_2(t) = t^3$$

(het standaardvoorbeeld met *niet* een unieke oplossing)

$$y'(t) = f(t, y) = 3y^{2/3} = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

Twee *verschillende* oplossingen (op *elk* interval $(-h, h)$):

$$y_1(t) = 0, \quad \text{en} \quad y_2(t) = t^3$$

Merk op $\partial f / \partial y = 2y^{-1/3} = 2/\sqrt[3]{y}$

(het standaardvoorbeeld met *niet* een unieke oplossing)

$$y'(t) = f(t, y) = 3y^{2/3} = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

Twee *verschillende* oplossingen (op *elk* interval $(-h, h)$):

$$y_1(t) = 0, \quad \text{en} \quad y_2(t) = t^3$$

Merk op $\partial f / \partial y = 2y^{-1/3} = 2/\sqrt[3]{y}$ is **niet** continu in 0.

Definitie

Een **lineaire differentiaalvergelijking van de orde n** :

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t).$$

Definitie

Een **lineaire differentiaalvergelijking van de orde n** :

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t).$$

De bijbehorende **homogene** (of: **gereduceerde**) vergelijking: stel $g(t) = 0$.

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling

Neem aan dat de functies $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ en $g(t)$ in de LDV continu zijn.

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling

Neem aan dat de functies $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ en $g(t)$ in de LDV continu zijn.

- Elke n -de orde homogene lineaire DV heeft precies n onafhankelijke oplossingen $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$,

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling

Neem aan dat de functies $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ en $g(t)$ in de LDV continu zijn.

- Elke n -de orde homogene lineaire DV heeft precies n onafhankelijke oplossingen $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$, en de algemene oplossing is van de vorm

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling

Neem aan dat de functies $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ en $g(t)$ in de LDV continu zijn.

- Elke n -de orde homogene lineaire DV heeft precies n onafhankelijke oplossingen $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$, en de algemene oplossing is van de vorm

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

- De algemene oplossing van een lineaire DV is van de vorm

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n.$$

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling

Neem aan dat de functies $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ en $g(t)$ in de LDV continu zijn.

- Elke n -de orde homogene lineaire DV heeft precies n onafhankelijke oplossingen $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$, en de algemene oplossing is van de vorm

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

- De algemene oplossing van een lineaire DV is van de vorm

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n.$$

Hierbij is y_p een (particuliere) oplossing van de DV,

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling

Neem aan dat de functies $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ en $g(t)$ in de LDV continu zijn.

- Elke n -de orde homogene lineaire DV heeft precies n onafhankelijke oplossingen $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$, en de algemene oplossing is van de vorm

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

- De algemene oplossing van een lineaire DV is van de vorm

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n.$$

Hierbij is y_p een (particuliere) oplossing van de DV, en zijn y_1, y_2, \dots, y_n oplossingen van de bijbehorende gereduceerde vergelijking.

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling (derde deel)

- Er is precies één oplossing bij de 'beginvoorwaarden':

$$y(t_0) = p_0, \quad y'(t_0) = p_1, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(t_0) = p_{n-1}$$

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling (derde deel)

- Er is precies één oplossing bij de 'beginvoorwaarden':

$$y(t_0) = p_0, \quad y'(t_0) = p_1, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(t_0) = p_{n-1}$$

Bovendien is deze oplossing gedefinieerd op het hele interval (α, β) rond t_0 waarop de functies $a_i(t)$ en $g(t)$ continu zijn.

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling (derde deel)

- Er is precies één oplossing bij de 'beginvoorwaarden':

$$y(t_0) = p_0, \quad y'(t_0) = p_1, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(t_0) = p_{n-1}$$

Bovendien is deze oplossing gedefinieerd op het hele interval (α, β) rond t_0 waarop de functies $a_i(t)$ en $g(t)$ continu zijn.

Voorbeeld

Bepaal de oplossing van de (*niet lineaire*) DV + BVW

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

We bekijken het stelsel 1ste orde DV's

$$\begin{cases} x_1' = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

We bekijken het stelsel 1ste orde DV's

$$\begin{cases} x_1' = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Gebruikelijke 'beginvoorwaarden':

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

We bekijken het stelsel 1ste orde DV's

$$\begin{cases} x_1' = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Gebruikelijke 'beginvoorwaarden':

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \dots \quad x_n(t_0) = x_n^0.$$

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

We bekijken het stelsel 1ste orde DV's

$$\begin{cases} x_1' = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n' = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Gebruikelijke 'beginvoorwaarden':

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \dots \quad x_n(t_0) = x_n^0.$$

Afgekort: $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0.$

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (7.1.1)

Neem aan dat de functies F_1, F_2, \dots, F_n en alle partiële afgeleiden $\partial F_i / \partial x_j$ continu zijn in een omgeving van het punt (t_0, \mathbf{x}^0)

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (7.1.1)

Neem aan dat de functies F_1, F_2, \dots, F_n en alle partiële afgeleiden $\partial F_i / \partial x_j$ continu zijn in een omgeving van het punt (t_0, \mathbf{x}^0) (dit punt ligt in \mathbb{R}^{n+1}).

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (7.1.1)

Neem aan dat de functies F_1, F_2, \dots, F_n en alle partiële afgeleiden $\partial F_i / \partial x_j$ continu zijn in een omgeving van het punt (t_0, \mathbf{x}^0) (dit punt ligt in \mathbb{R}^{n+1}).

Dan heeft het beginwaardeprobleem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

op een zeker interval $(t_0 - h, t_0 + h)$ een *unieke* oplossing.

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (7.1.1)

Neem aan dat de functies F_1, F_2, \dots, F_n en alle partiële afgeleiden $\partial F_i / \partial x_j$ continu zijn in een omgeving van het punt (t_0, \mathbf{x}^0) (dit punt ligt in \mathbb{R}^{n+1}).

Dan heeft het beginwaardeprobleem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

op een zeker interval $(t_0 - h, t_0 + h)$ een *unieke* oplossing.

Dus:

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (7.1.1)

Neem aan dat de functies F_1, F_2, \dots, F_n en alle partiële afgeleiden $\partial F_i / \partial x_j$ continu zijn in een omgeving van het punt (t_0, \mathbf{x}^0) (dit punt ligt in \mathbb{R}^{n+1}).

Dan heeft het beginwaardeprobleem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

op een zeker interval $(t_0 - h, t_0 + h)$ een *unieke* oplossing.

Dus: er zijn unieke functies

$x_1 = \phi_1(t), x_2 = \phi_2(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ die tesamen aan zowel het stelsel differentiaalvergelijkingen als aan de beginwaarden voldoen.

Stelsels eerste orde **lineaire** differentiaalvergelijkingen

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \dots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ \vdots \\ x_n' = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{array} \right.$$

Stelsels eerste orde **lineaire** differentiaalvergelijkingen

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \dots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ \vdots \\ x_n' = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{array} \right.$$

Afgekort:

Stelsels eerste orde **lineaire** differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \dots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}$$

Afgekort:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t),$$

Stelsels eerste orde **lineaire** differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \dots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}$$

Afgekort:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & \dots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & \dots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \dots & \dots & p_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Existentiestelling voor stelsels **lineaire** differentiaalvergelijkingen

Stelling (7.1.2)

Neem aan dat de functies $p_{ij}(t)$, $g_i(t)$ continu zijn in op een interval (α, β) rond het punt t_0 .

Existentiestelling voor stelsels **lineaire** differentiaalvergelijkingen

Stelling (7.1.2)

Neem aan dat de functies $p_{ij}(t)$, $g_i(t)$ continu zijn in op een interval (α, β) rond het punt t_0 .

Dan heeft het beginwaardeprobleem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

Existentiestelling voor stelsels **lineaire** differentiaalvergelijkingen

Stelling (7.1.2)

Neem aan dat de functies $p_{ij}(t)$, $g_i(t)$ continu zijn in op een interval (α, β) rond het punt t_0 .

Dan heeft het beginwaardeprobleem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

een **unieke** oplossing op

Existentiestelling voor stelsels **lineaire** differentiaalvergelijkingen

Stelling (7.1.2)

Neem aan dat de functies $p_{ij}(t)$, $g_i(t)$ continu zijn in op een interval (α, β) rond het punt t_0 .

Dan heeft het beginwaardeprobleem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

een **unieke** oplossing op het **hele** interval (α, β) .

Existentiestelling voor stelsels **lineaire** differentiaalvergelijkingen

Stelling (7.1.2)

Neem aan dat de functies $p_{ij}(t)$, $g_i(t)$ continu zijn in op een interval (α, β) rond het punt t_0 .

Dan heeft het beginwaardeprobleem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

een **unieke** oplossing op het **hele** interval (α, β) .

Opmerking

De oplossingen $\mathbf{u}^{(k)}(t)$ van het stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$ die voldoen aan

$$x_i(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{als } i = k \\ 0, & \text{als } i \neq k \end{cases}$$

Opmerking

De oplossingen $\mathbf{u}^{(k)}(t)$ van het stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$ die voldoen aan

$$x_i(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{als } i = k \\ 0, & \text{als } i \neq k \end{cases}$$

geven n onafhankelijke (vector)functies.

Opmerking

De oplossingen $\mathbf{u}^{(k)}(t)$ van het stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$ die voldoen aan

$$x_i(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{als } i = k \\ 0, & \text{als } i \neq k \end{cases}$$

geven n onafhankelijke (vector)functies.

Zo'n set $\{\mathbf{u}^{(1)}(t), \mathbf{u}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{u}^{(n)}(t)\}$

Opmerking

De oplossingen $\mathbf{u}^{(k)}(t)$ van het stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$ die voldoen aan

$$x_i(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{als } i = k \\ 0, & \text{als } i \neq k \end{cases}$$

geven n onafhankelijke (vector)functies.

Zo'n set $\{\mathbf{u}^{(1)}(t), \mathbf{u}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{u}^{(n)}(t)\}$ van onafhankelijke oplossingen

Opmerking

De oplossingen $\mathbf{u}^{(k)}(t)$ van het stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$ die voldoen aan

$$x_i(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{als } i = k \\ 0, & \text{als } i \neq k \end{cases}$$

geven n onafhankelijke (vector)functies.

Zo'n set $\{\mathbf{u}^{(1)}(t), \mathbf{u}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{u}^{(n)}(t)\}$ van onafhankelijke oplossingen

wordt wel een **fundamental set of solutions** genoemd.