

Beschrijving van de methode

Gegeven het beginwaardeprobleem $\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Beschrijving van de methode

Gegeven het beginwaardeprobleem $\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Gevraagd: een benadering van de oplossing op het interval $[a, b]$.

Beschrijving van de methode

Gegeven het beginwaardeprobleem $\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Gevraagd: een benadering van de oplossing op het interval $[a, b]$.

Aanpak: Verdeel het interval in n deelintervallen $[x_{k-1}, x_k]$ van lengte $h = (b - a)/n$.

Beschrijving van de methode

Gegeven het beginwaardeprobleem
$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Gevraagd: een benadering van de oplossing op het interval $[a, b]$.

Aanpak: Verdeel het interval in n deelintervallen $[x_{k-1}, x_k]$ van lengte $h = (b - a)/n$.

Benader de oplossing $y(x_k)$ in de punten $x_k = a + kh$ door de waarden $y_0, y_1 = y_1^E, \dots, y_n = y_n^E$ stap voor stap via:

Beschrijving van de methode

Gegeven het beginwaardeprobleem $\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Gevraagd: een benadering van de oplossing op het interval $[a, b]$.

Aanpak: Verdeel het interval in n deelintervallen $[x_{k-1}, x_k]$ van lengte $h = (b - a)/n$.

Benader de oplossing $y(x_k)$ in de punten $x_k = a + kh$ door de waarden $y_0, y_1 = y_1^E, \dots, y_n = y_n^E$ stap voor stap via:

$$y_{k+1}^E = y_k^E + h \cdot F(x_k, y_k^E), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Beschrijving van de methode

Gegeven het beginwaardeprobleem $\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Gevraagd: een benadering van de oplossing op het interval $[a, b]$.

Aanpak: Verdeel het interval in n deelintervallen $[x_{k-1}, x_k]$ van lengte $h = (b - a)/n$.

Benader de oplossing $y(x_k)$ in de punten $x_k = a + kh$ door de waarden $y_0, y_1 = y_1^E, \dots, y_n = y_n^E$ stap voor stap via:

$$y_{k+1}^E = y_k^E + h \cdot F(x_k, y_k^E), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Meetkundig idee: handel alsof $y'(x)$ tussen x_k en x_{k+1} niet verandert.

Voorbeeld

Het BWP $\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Voorbeeld

Het BWP $\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

heeft oplossing $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

Voorbeeld

Het BWP $\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

heeft oplossing $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

Benadering van de oplossing op het interval $[0, 1]$
met stapgrootte $h = 0.25$: ($x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, \text{etc.}$)

Voorbeeld

Het BWP $\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

heeft oplossing $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

Benadering van de oplossing op het interval $[0, 1]$
met stapgrootte $h = 0.25$: ($x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, etc.)

$$y_0 = 1$$

Voorbeeld

$$\text{Het BWP } \begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

heeft oplossing $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

Benadering van de oplossing op het interval $[0, 1]$
met stapgrootte $h = 0.25$: ($x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, \text{ etc.}$)

$$y_0 = 1$$

$$y_1^E = y_0 + h \cdot (x_0 - y_0) =$$

Voorbeeld

$$\text{Het BWP } \begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

heeft oplossing $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

Benadering van de oplossing op het interval $[0, 1]$
met stapgrootte $h = 0.25$: ($x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, \text{ etc.}$)

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_1^E &= y_0 + h \cdot (x_0 - y_0) = 1 + 0.25 \cdot (0 - 1) \end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\text{Het BWP } \begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

heeft oplossing $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

Benadering van de oplossing op het interval $[0, 1]$
met stapgrootte $h = 0.25$: ($x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, etc.)

$$y_0 = 1$$

$$y_1^E = y_0 + h \cdot (x_0 - y_0) = 1 + 0.25 \cdot (0 - 1) = 0.75$$

Voorbeeld

$$\text{Het BWP } \begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

heeft oplossing $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

Benadering van de oplossing op het interval $[0, 1]$
met stapgrootte $h = 0.25$: ($x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, etc.)

$$y_0 = 1$$

$$y_1^E = y_0 + h \cdot (x_0 - y_0) = 1 + 0.25 \cdot (0 - 1) = 0.75$$

$$y_2^E = y_1^E + h \cdot (x_1 - y_1^E) =$$

Voorbeeld

$$\text{Het BWP } \begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

heeft oplossing $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

Benadering van de oplossing op het interval $[0, 1]$
met stapgrootte $h = 0.25$: ($x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, etc.)

$$y_0 = 1$$

$$y_1^E = y_0 + h \cdot (x_0 - y_0) = 1 + 0.25 \cdot (0 - 1) = 0.75$$

$$y_2^E = y_1^E + h \cdot (x_1 - y_1^E) = 0.75 + 0.25 \cdot (0.25 - 0.75)$$

Voorbeeld

$$\text{Het BWP } \begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

heeft oplossing $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

Benadering van de oplossing op het interval $[0, 1]$

met stapgrootte $h = 0.25$: ($x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, etc.)

$$y_0 = 1$$

$$y_1^E = y_0 + h \cdot (x_0 - y_0) = 1 + 0.25 \cdot (0 - 1) = 0.75$$

$$y_2^E = y_1^E + h \cdot (x_1 - y_1^E) = 0.75 + 0.25 \cdot (0.25 - 0.75) = 0.625$$

Voorbeeld

$$\text{Het BWP } \begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

heeft oplossing $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

Benadering van de oplossing op het interval $[0, 1]$

met stapgrootte $h = 0.25$: ($x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, etc.)

$$y_0 = 1$$

$$y_1^E = y_0 + h \cdot (x_0 - y_0) = 1 + 0.25 \cdot (0 - 1) = 0.75$$

$$y_2^E = y_1^E + h \cdot (x_1 - y_1^E) = 0.75 + 0.25 \cdot (0.25 - 0.75) = 0.625$$

$$y_3^E = y_2^E + h \cdot (x_2 - y_2^E) = \dots = 0.5938$$

Voorbeeld

$$\text{Het BWP } \begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

heeft oplossing $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

Benadering van de oplossing op het interval $[0, 1]$

met stapgrootte $h = 0.25$: ($x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, etc.)

$$y_0 = 1$$

$$y_1^E = y_0 + h \cdot (x_0 - y_0) = 1 + 0.25 \cdot (0 - 1) = 0.75$$

$$y_2^E = y_1^E + h \cdot (x_1 - y_1^E) = 0.75 + 0.25 \cdot (0.25 - 0.75) = 0.625$$

$$y_3^E = y_2^E + h \cdot (x_2 - y_2^E) = \dots = 0.5938$$

$$y_4^E = y_3^E + h \cdot (x_3 - y_3^E) = \dots = 0.6328$$

Voorbeeld

$$\text{Het BWP } \begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

heeft oplossing $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

Benadering van de oplossing op het interval $[0, 1]$

met stapgrootte $h = 0.25$: ($x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, etc.)

$$y_0 = 1$$

$$y_1^E = y_0 + h \cdot (x_0 - y_0) = 1 + 0.25 \cdot (0 - 1) = 0.75$$

$$y_2^E = y_1^E + h \cdot (x_1 - y_1^E) = 0.75 + 0.25 \cdot (0.25 - 0.75) = 0.625$$

$$y_3^E = y_2^E + h \cdot (x_2 - y_2^E) = \dots = 0.5938$$

$$y_4^E = y_3^E + h \cdot (x_3 - y_3^E) = \dots = 0.6328$$

Voorbeeld (vervolg)

Tabel met oplossing en benadering:

x	y	y^E
0	1.00	1.00

Voorbeeld (vervolg)

Tabel met oplossing en benadering:

x	y	y^E
0	1.00	1.00
0.25	0.8076	0.75

Voorbeeld (vervolg)

Tabel met oplossing en benadering:

x	y	y^E
0	1.00	1.00
0.25	0.8076	0.75
0.5	0.7131	0.625
0.75	0.6947	0.5938
1.0	0.7358	0.6328

Voorbeeld (vervolg)

Het BWP $\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ heeft oplossing $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

Benadering van de oplossing met **stapgrootte $h = 0.1$** :

Voorbeeld (vervolg)

Het BWP $\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ heeft oplossing $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

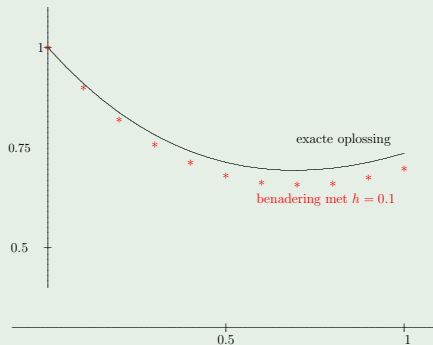
Benadering van de oplossing met **stapgrootte $h = 0.1$** :

Tabel met oplossing en benadering:

x	y	y^E
0	1.0000	1.0000
0.1000	0.9097	0.9000
0.2000	0.8375	0.8200
0.3000	0.7816	0.7580
0.4000	0.7406	0.7122
0.5000	0.7131	0.6810
0.6000	0.6976	0.6629
0.7000	0.6932	0.6566
0.8000	0.6987	0.6609
0.9000	0.7131	0.6748
1.0000	0.7358	0.6974

Voorbeeld (vervolg)

Een plaatje zegt meer!



Methode van Euler verfijnen

Bekijk nog eens: DV: $y' = F(x, y)$,

Methode van Euler verfijnen

Bekijk nog eens: DV: $y' = F(x, y)$,

oftewel $y'(x) = F(x, y(x))$

Methode van Euler verfijnen

Bekijk nog eens: DV: $y' = F(x, y)$,

oftewel $y'(x) = F(x, y(x))$,

oftewel $y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x F(x, y(x)) dx$.

Bij Euler gebruikt: $\int_a^{a+h} f(x) dx \approx h \cdot f(a)$.

Methode van Euler verfijnen

Bekijk nog eens: DV: $y' = F(x, y)$,

oftewel $y'(x) = F(x, y(x))$,

oftewel $y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x F(x, y(x)) dx$.

Bij Euler gebruikt: $\int_a^{a+h} f(x) dx \approx h \cdot f(a)$.

Beter: $\int_a^{a+h} f(x) dx \approx \frac{1}{2}h \cdot (f(a) + f(a+h))$.

Methode van Euler verfijnen

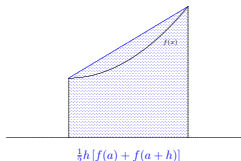
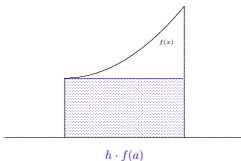
Bekijk nog eens: DV: $y' = F(x, y)$,

oftewel $y'(x) = F(x, y(x))$,

oftewel $y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x F(x, y(x)) dx$.

Bij Euler gebruikt: $\int_a^{a+h} f(x) dx \approx h \cdot f(a)$.

Beter: $\int_a^{a+h} f(x) dx \approx \frac{1}{2}h \cdot (f(a) + f(a+h))$.



Methode van Heun

$$\text{DV: } y' = F(x, y),$$

Methode van Heun

DV: $y' = F(x, y)$,

oftewel $y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x F(x, y(x)) dx$.

Methode van Heun

DV: $y' = F(x, y)$,

oftewel $y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x F(x, y(x)) dx$.

Op het interval $[a, a + h]$:

$$y(a + h) = y(a) + \int_a^{a+h} F(x, y(x)) dx$$

Methode van Heun

DV: $y' = F(x, y)$,

oftewel $y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x F(x, y(x)) dx$.

Op het interval $[a, a + h]$:

$$\begin{aligned} y(a+h) &= y(a) + \int_a^{a+h} F(x, y(x)) dx \\ &\approx y(a) + \frac{1}{2}h [F(a, y(a)) + F(a+h, y(a+h))] \end{aligned}$$

Methode van Heun

DV: $y' = F(x, y)$,

oftewel $y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x F(x, y(x)) dx$.

Op het interval $[a, a + h]$:

$$\begin{aligned}y(a + h) &= y(a) + \int_a^{a+h} F(x, y(x)) dx \\ &\approx y(a) + \frac{1}{2}h [F(a, y(a)) + F(a + h, y(a + h))] \\ &\approx y(a) + \frac{1}{2}h [F(a, y(a)) + F(a + h, y^E(a + h))].\end{aligned}$$

waarbij y^E de schatting is volgens de methode van Euler.

Beschrijving van de methode voor
$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Als bij de methode van Euler: verdeel $[a, b]$ in n deelintervallen van lengte h : $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = x_1 + h = a + 2h$, etc.

Beschrijving van de methode voor
$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Als bij de methode van Euler: verdeel $[a, b]$ in n deelintervallen van lengte h : $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = x_1 + h = a + 2h$, etc.

Bereken benaderingen y_1^H, \dots, y_n^H voor $y(x_0 + h), \dots, y(x_0 + nh)$,
via

Beschrijving van de methode voor
$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Als bij de methode van Euler: verdeel $[a, b]$ in n deelintervallen van lengte h : $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = x_1 + h = a + 2h$, etc.

Bereken benaderingen y_1^H, \dots, y_n^H voor $y(x_0 + h), \dots, y(x_0 + nh)$, via

$$y_1^E = y_0 + h F(x_0, y_0);$$

$$y_1^H = y_0 + \frac{1}{2}h [F(x_0, y_0) + F(x_1, y_1^E)].$$

Beschrijving van de methode voor
$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Als bij de methode van Euler: verdeel $[a, b]$ in n deelintervallen van lengte h : $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = x_1 + h = a + 2h$, etc.

Bereken benaderingen y_1^H, \dots, y_n^H voor $y(x_0 + h), \dots, y(x_0 + nh)$, via

$$y_1^E = y_0 + h F(x_0, y_0);$$

$$y_1^H = y_0 + \frac{1}{2}h [F(x_0, y_0) + F(x_1, y_1^E)].$$

$$y_2^E = y_1^H + h F(x_1, y_1^H);$$

$$y_2^H = y_1^H + \frac{1}{2}h [F(x_1, y_1^H) + F(x_2, y_2^E)].$$

Beschrijving van de methode voor
$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Als bij de methode van Euler: verdeel $[a, b]$ in n deelintervallen van lengte h : $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = x_1 + h = a + 2h$, etc.

Bereken benaderingen y_1^H, \dots, y_n^H voor $y(x_0 + h), \dots, y(x_0 + nh)$, via

$$y_1^E = y_0 + h F(x_0, y_0);$$

$$y_1^H = y_0 + \frac{1}{2}h [F(x_0, y_0) + F(x_1, y_1^E)].$$

$$y_2^E = y_1^H + h F(x_1, y_1^H);$$

$$y_2^H = y_1^H + \frac{1}{2}h [F(x_1, y_1^H) + F(x_2, y_2^E)].$$

en algemeen

Beschrijving van de methode voor
$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Als bij de methode van Euler: verdeel $[a, b]$ in n deelintervallen van lengte h : $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = x_1 + h = a + 2h$, etc.

Bereken benaderingen y_1^H, \dots, y_n^H voor $y(x_0 + h), \dots, y(x_0 + nh)$, via

$$y_1^E = y_0 + h F(x_0, y_0);$$

$$y_1^H = y_0 + \frac{1}{2}h [F(x_0, y_0) + F(x_1, y_1^E)].$$

$$y_2^E = y_1^H + h F(x_1, y_1^H);$$

$$y_2^H = y_1^H + \frac{1}{2}h [F(x_1, y_1^H) + F(x_2, y_2^E)].$$

en algemeen

$$y_{k+1}^E = y_k^H + h F(x_k, y_k^H);$$

$$y_{k+1}^H = y_k^H + \frac{1}{2}h [F(x_k, y_k^H) + F(x_{k+1}, y_{k+1}^E)].$$

Vergelijking van de twee benaderingen

Het BWP $\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ heeft oplossing $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

Benadering van de oplossing met **stapgrootte $h = 0.1$** :

Vergelijking van de twee benaderingen

Het BWP $\begin{cases} y' = x - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ heeft oplossing $y(x) = x - 1 + 2e^{-x}$.

Benadering van de oplossing met **stapgrootte $h = 0.1$** :

x	y_{exact}	y^E	y^H
0.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1000	0.9097	0.9000	0.9100
0.2000	0.8375	0.8200	0.8381
0.3000	0.7816	0.7580	0.7824
0.4000	0.7406	0.7122	0.7416
0.5000	0.7131	0.6810	0.7142
0.6000	0.6976	0.6629	0.6988
0.7000	0.6932	0.6566	0.6944
0.8000	0.6987	0.6609	0.7000
0.9000	0.7131	0.6748	0.7145
1.0000	0.7358	0.6974	0.7371

Euler en Heun voor stelsels

Euler en Heun voor stelsels

Gevraagd: (numerieke) oplossing op het interval $[a, b]$ voor

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}^{(0)} \end{cases} \quad \text{waarbij} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Euler en Heun voor stelsels

Gevraagd: (numerieke) oplossing op het interval $[a, b]$ voor

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}^{(0)} \end{cases} \quad \text{waarbij} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

De formules zijn **volledig analoog**:

Euler en Heun voor stelsels

Gevraagd: (numerieke) oplossing op het interval $[a, b]$ voor

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}^{(0)} \end{cases} \quad \text{waarbij} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

De formules zijn **volledig analoog**:

Verdeel het interval in n deelintervallen $[t_{k-1}, t_k]$ van lengte $h = (b - a)/n$.

Euler en Heun voor stelsels

Gevraagd: (numerieke) oplossing op het interval $[a, b]$ voor

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}^{(0)} \end{cases} \quad \text{waarbij} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

De formules zijn **volledig analoog**:

Verdeel het interval in n deelintervallen $[t_{k-1}, t_k]$ van lengte $h = (b - a)/n$.

Benader de oplossing $\mathbf{x}(t_k)$ in de punten $t_k = a + kh$ door de waarden $\mathbf{x}_0^E = \mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}_1^E, \dots, \mathbf{x}_n^E$ stap voor stap via:

Euler en Heun voor stelsels

Gevraagd: (numerieke) oplossing op het interval $[a, b]$ voor

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}^{(0)} \end{cases} \quad \text{waarbij} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

De formules zijn **volledig analoog**:

Verdeel het interval in n deelintervallen $[t_{k-1}, t_k]$ van lengte $h = (b - a)/n$.

Benader de oplossing $\mathbf{x}(t_k)$ in de punten $t_k = a + kh$ door de waarden $\mathbf{x}_0^E = \mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{x}_1^E, \dots, \mathbf{x}_n^E$ stap voor stap via:

$$\mathbf{x}_{k+1}^E = \mathbf{x}_k^E + h \cdot \mathbf{F}(t_k, \mathbf{x}_k^E), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Euler en Heun voor stelsels

Gevraagd: (numerieke) oplossing op het interval $[a, b]$ voor

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}^{(0)} \end{cases} \quad \text{waarbij} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

De formules zijn **volledig analoog**:

Verdeel het interval in n deelintervallen $[t_{k-1}, t_k]$ van lengte $h = (b - a)/n$.

Benader de oplossing $\mathbf{x}(t_k)$ in de punten $t_k = a + kh$ door de waarden $\mathbf{x}_0^E = \mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{x}_1^E, \dots, \mathbf{x}_n^E$ stap voor stap via:

$$\mathbf{x}_{k+1}^E = \mathbf{x}_k^E + h \cdot \mathbf{F}(t_k, \mathbf{x}_k^E), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

en voor Heun vergelijkenderwijs.

Theorem

If \tilde{y} denotes the exact solution of the BVP $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, and y_1^H the approximation to it at the point $x_0 + h$, then the **error** is of the order h^3 :

$$y_1^H - \tilde{y}(x_0 + h) = \mathcal{O}(h^3), \text{ if } h \rightarrow 0$$

which means that $|y_1^H - \tilde{y}(x_0 + h)| \leq Kh^3$, for some constant K .

Proof

For the DE $y' = F(x, y)$ with initial condition $y(x_0) = y_0$:

$$\begin{aligned} y_1^H &= y_0 + \frac{1}{2}h \left[F(x_0, y_0) + F(x_1, y_1^E) \right] \\ &= y_0 + \frac{1}{2}h \left[F(x_0, y_0) + F(x_0 + h, y_0 + hF(x_0, y_0)) \right] \end{aligned}$$

The true solution \tilde{y} will satisfy

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

Theorem

If \tilde{y} denotes the exact solution of the BVP $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, and y_1^H the approximation to it at the point $x_0 + h$, then the **error** is of the order h^3 :

$$y_1^H - \tilde{y}(x_0 + h) = \mathcal{O}(h^3), \text{ if } h \rightarrow 0$$

which means that $|y_1^H - \tilde{y}(x_0 + h)| \leq Kh^3$, for some constant K .

Proof

For the DE $y' = F(x, y)$ with initial condition $y(x_0) = y_0$:

$$\begin{aligned} y_1^H &= y_0 + \frac{1}{2}h \left[F(x_0, y_0) + F(x_1, y_1^E) \right] \\ &= y_0 + \frac{1}{2}h \left[F(x_0, y_0) + F(x_0 + h, y_0 + hF(x_0, y_0)) \right] \end{aligned}$$

The true solution \tilde{y} will satisfy

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

Theorem

If \tilde{y} denotes the exact solution of the BVP $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, and y_1^H the approximation to it at the point $x_0 + h$, then the **error** is of the order h^3 :

$$y_1^H - \tilde{y}(x_0 + h) = \mathcal{O}(h^3), \text{ if } h \rightarrow 0$$

which means that $|y_1^H - \tilde{y}(x_0 + h)| \leq Kh^3$, for some constant K .

Proof

For the DE $y' = F(x, y)$ with initial condition $y(x_0) = y_0$:

$$\begin{aligned} y_1^H &= y_0 + \frac{1}{2}h \left[F(x_0, y_0) + F(x_1, y_1^E) \right] \\ &= y_0 + \frac{1}{2}h \left[F(x_0, y_0) + F(x_0 + h, y_0 + hF(x_0, y_0)) \right] \end{aligned}$$

The true solution \tilde{y} will satisfy

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

Theorem

If \tilde{y} denotes the exact solution of the BVP $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, and y_1^H the approximation to it at the point $x_0 + h$, then the **error** is of the order h^3 :

$$y_1^H - \tilde{y}(x_0 + h) = \mathcal{O}(h^3), \text{ if } h \rightarrow 0$$

which means that $|y_1^H - \tilde{y}(x_0 + h)| \leq Kh^3$, for some constant K .

Proof

For the DE $y' = F(x, y)$ with initial condition $y(x_0) = y_0$:

$$\begin{aligned} y_1^H &= y_0 + \frac{1}{2}h \left[F(x_0, y_0) + F(x_1, y_1^E) \right] \\ &= y_0 + \frac{1}{2}h \left[F(x_0, y_0) + F(x_0 + h, y_0 + hF(x_0, y_0)) \right] \end{aligned}$$

The true solution \tilde{y} will satisfy

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

Theorem

If \tilde{y} denotes the exact solution of the BVP $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, and y_1^H the approximation to it at the point $x_0 + h$, then the **error** is of the order h^3 .

Proof (continued)

The true solution \tilde{y} will satisfy

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

Theorem

If \tilde{y} denotes the exact solution of the BVP $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, and y_1^H the approximation to it at the point $x_0 + h$, then the **error** is of the order h^3 .

Proof (continued)

The true solution \tilde{y} will satisfy

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

which owing to $y'' = \frac{\partial}{\partial x} [F(x, y)] = F_x(x, y) + F_y(x, y) \cdot y'$ yields

Theorem

If \tilde{y} denotes the exact solution of the BVP $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, and y_1^H the approximation to it at the point $x_0 + h$, then the **error** is of the order h^3 .

Proof (continued)

The true solution \tilde{y} will satisfy

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

which owing to $y'' = \frac{\partial}{\partial x} [F(x, y)] = F_x(x, y) + F_y(x, y) \cdot y'$ yields

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y_0 + F(x_0, y_0)h + \frac{1}{2}h^2 (F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0)F(x_0, y_0)) + \mathcal{O}(h^3)$$

Theorem

If \tilde{y} denotes the exact solution of the BVP $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, and y_1^H the approximation to it at the point $x_0 + h$, then the **error** is of the order h^3 .

Proof (continued)

The true solution \tilde{y} will satisfy

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

which owing to $y'' = \frac{\partial}{\partial x} [F(x, y)] = F_x(x, y) + F_y(x, y) \cdot y'$ yields

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y_0 + F(x_0, y_0)h + \frac{1}{2}h^2 (F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0)F(x_0, y_0)) + \mathcal{O}(h^3)$$

$\mathcal{O}(h^3)$ here means: all other terms are of order h^3 or smaller.

For the exact solution:

$$\tilde{y}(x_0 + h) =$$

$$y_0 + F(x_0, y_0)h + \frac{1}{2}h^2 (F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0)F(x_0, y_0)) + \mathcal{O}(h^3)$$

Compare this with

$$y_1^H = y_0 + \frac{1}{2}h [F(x_0, y_0) + F(x_0 + h, y_0 + hF(x_0, y_0))]$$

For the exact solution:

$$\tilde{y}(x_0 + h) =$$

$$y_0 + F(x_0, y_0)h + \frac{1}{2}h^2 (F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0)F(x_0, y_0)) + \mathcal{O}(h^3)$$

Compare this with

$$y_1^H = y_0 + \frac{1}{2}h [F(x_0, y_0) + F(x_0 + h, y_0 + hF(x_0, y_0))]$$

$$= y_0 + \frac{1}{2}h [F(x_0, y_0) + (F(x_0, y_0) + hF_x(x_0, y_0) + hF(x_0, y_0) \cdot F_y(x_0, y_0)) + \mathcal{O}(h^2)]$$

For the exact solution:

$$\tilde{y}(x_0 + h) =$$

$$y_0 + F(x_0, y_0)h + \frac{1}{2}h^2 (F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0)F(x_0, y_0)) + \mathcal{O}(h^3)$$

Compare this with

$$y_1^H = y_0 + \frac{1}{2}h [F(x_0, y_0) + F(x_0 + h, y_0 + hF(x_0, y_0))]$$

$$= y_0 + \frac{1}{2}h [F(x_0, y_0) + (F(x_0, y_0) + hF_x(x_0, y_0) + hF(x_0, y_0) \cdot F_y(x_0, y_0)) + \mathcal{O}(h^2)]$$

$$= y_0 + hF(x_0, y_0) + \frac{1}{2}h^2 [F_x(x_0, y_0) + F(x_0, y_0) \cdot F_y(x_0, y_0)] + \mathcal{O}(h^3)$$

For the exact solution:

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y_0 + F(x_0, y_0)h + \frac{1}{2}h^2 (F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0)F(x_0, y_0)) + \mathcal{O}(h^3)$$

Compare this with

$$\begin{aligned} y_1^H &= y_0 + \frac{1}{2}h [F(x_0, y_0) + F(x_0 + h, y_0 + hF(x_0, y_0))] \\ &= y_0 + \frac{1}{2}h [F(x_0, y_0) + (F(x_0, y_0) + hF_x(x_0, y_0) + hF(x_0, y_0) \cdot F_y(x_0, y_0)) + \mathcal{O}(h^2)] \\ &= y_0 + hF(x_0, y_0) + \frac{1}{2}h^2 [F_x(x_0, y_0) + F(x_0, y_0) \cdot F_y(x_0, y_0)] + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

So $\tilde{y}(x_0 + h) - y_1^H$ is of order h^3 .

For the exact solution:

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y_0 + F(x_0, y_0)h + \frac{1}{2}h^2 (F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0)F(x_0, y_0)) + \mathcal{O}(h^3)$$

Compare this with

$$\begin{aligned} y_1^H &= y_0 + \frac{1}{2}h [F(x_0, y_0) + F(x_0 + h, y_0 + hF(x_0, y_0))] \\ &= y_0 + \frac{1}{2}h [F(x_0, y_0) + (F(x_0, y_0) + hF_x(x_0, y_0) + hF(x_0, y_0) \cdot F_y(x_0, y_0)) + \mathcal{O}(h^2)] \\ &= y_0 + hF(x_0, y_0) + \frac{1}{2}h^2 [F_x(x_0, y_0) + F(x_0, y_0) \cdot F_y(x_0, y_0)] + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

So $\tilde{y}(x_0 + h) - y_1^H$ is of order h^3 .

In practice:

if h is halved, the error reduces more or less with a factor $1/8$.

For the exact solution:

$$\tilde{y}(x_0 + h) = y_0 + F(x_0, y_0)h + \frac{1}{2}h^2 (F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0)F(x_0, y_0)) + \mathcal{O}(h^3)$$

Compare this with

$$\begin{aligned} y_1^H &= y_0 + \frac{1}{2}h [F(x_0, y_0) + F(x_0 + h, y_0 + hF(x_0, y_0))] \\ &= y_0 + \frac{1}{2}h [F(x_0, y_0) + (F(x_0, y_0) + hF_x(x_0, y_0) + hF(x_0, y_0) \cdot F_y(x_0, y_0)) + \mathcal{O}(h^2)] \\ &= y_0 + hF(x_0, y_0) + \frac{1}{2}h^2 [F_x(x_0, y_0) + F(x_0, y_0) \cdot F_y(x_0, y_0)] + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

So $\tilde{y}(x_0 + h) - y_1^H$ is of order h^3 .

In practice:

if h is halved, the error reduces more or less with a factor $1/8$.

Also, if the interval $[a, b]$ is subdivided in intervals of length h :
the overall error is of order h^2 .