Recap Differentiaalvergelijkingen Analyse 1 (2,3)

07-09-2011

kun je 't nog?

kun je 't nog?

(voorafjes)

Los op:

1) $y' = 2y$.

kun je 't nog?

(voorafjes)

Los op:

1) $y' = 2y$. $\quad y = Ce^{2x}, \; C \in \mathbb{R}$.

kun je 't nog?

(voorafjes)

Los op:

1) $y' = 2y$. $\quad y = Ce^{2x}, \;\; C \in \mathbb{R}$.
2) $y' = y^2$.

kun je 't nog?

(voorafjes)

Los op:

1) $y' = 2y$. $\quad y = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}$.
2) $y' = y^2$. $\quad y = \dfrac{1}{C - x}, \quad C \in \mathbb{R}$.

kun je 't nog?

(voorafjes)

Los op:

1) $y' = 2y.$ $\quad y = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$
2) $y' = y^2.$ $\quad y = \dfrac{1}{C - x}, \quad C \in \mathbb{R}.$
3) $y' = xy.$

kun je 't nog?

(voorafjes)

Los op:

1) $y' = 2y$. $\quad y = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}$.
2) $y' = y^2$. $\quad y = \dfrac{1}{C - x}, \quad C \in \mathbb{R}$.
3) $y' = xy$. $\quad y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$.

kun je 't nog?

(voorafjes)

Los op:

1) $y' = 2y$. $\quad y = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}$.
2) $y' = y^2$. $\quad y = \dfrac{1}{C - x}, \quad C \in \mathbb{R}$.
3) $y' = xy$. $\quad y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$.
4) $y'' + 2y' + 5y = \sin x$.

kun je 't nog?

(voorafjes)

Los op:

1) $y' = 2y$. $\quad y = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}$.
2) $y' = y^2$. $\quad y = \dfrac{1}{C - x}, \quad C \in \mathbb{R}$.
3) $y' = xy$. $\quad y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$.
4) $y'' + 2y' + 5y = \sin x$.

   $y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x +$

kun je 't nog?

(voorafjes)

Los op:

1) $y' = 2y. \qquad y = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$
2) $y' = y^2. \qquad y = \dfrac{1}{C - x}, \quad C \in \mathbb{R}.$
3) $y' = xy. \qquad y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$
4) $y'' + 2y' + 5y = \sin x.$

$$y = C_1 e^{-x} \cos 2x + C_2 e^{-x} \sin 2x + \tfrac{1}{5} \sin x - \tfrac{1}{10} \cos x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

kun je 't nog?

(voorafjes)

Los op:

1) $y' = 2y.\qquad y = Ce^{2x},\quad C \in \mathbb{R}.$
2) $y' = y^2.\qquad y = \dfrac{1}{C - x},\quad C \in \mathbb{R}.$
3) $y' = xy.\qquad y = Ce^{\frac{1}{2}x^2},\quad C \in \mathbb{R}.$
4) $y'' + 2y' + 5y = \sin x.$

$$y = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x + \tfrac{1}{5}\sin x - \tfrac{1}{10}\cos x,$$
$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Opmerking

1), 3) en 4) zijn lineair; 1), 2) en 3) zijn separabel.

Overzicht

- Wat is een DV? Wat is de orde van een DV?

Overzicht

- Wat is een DV? Wat is de orde van een DV?
  Wat is een (algemene) oplossing van een DV?

Overzicht

- Wat is een DV? Wat is de orde van een DV?
  Wat is een (algemene) oplossing van een DV?
- Oplosmethode van volgende drie typen DV's:

Overzicht

- Wat is een DV? Wat is de orde van een DV?
  Wat is een (algemene) oplossing van een DV?
- Oplosmethode van volgende drie typen DV's:
  - Eerste orde lineaire DV: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$.

Overzicht

- Wat is een DV? Wat is de orde van een DV?
  Wat is een (algemene) oplossing van een DV?
- Oplosmethode van volgende drie typen DV's:
  - Eerste orde lineaire DV: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$.
  - Separabele eerste orde DV: $p(y)y' = q(x)$.

Overzicht

- Wat is een DV? Wat is de orde van een DV?
  Wat is een (algemene) oplossing van een DV?
- Oplosmethode van volgende drie typen DV's:
  - Eerste orde lineaire DV: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$.
  - Separabele eerste orde DV: $p(y)y' = q(x)$.
  - Tweede orde lineaire DV met constante coëfficiënten en 'eenvoudig' rechterlid

Overzicht

- Wat is een DV? Wat is de orde van een DV?
  Wat is een (algemene) oplossing van een DV?

- Oplosmethode van volgende drie typen DV's:
  - Eerste orde lineaire DV: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$.
  - Separabele eerste orde DV: $p(y)y' = q(x)$.
  - Tweede orde lineaire DV met constante coëfficiënten en 'eenvoudig' rechterlid $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Overzicht

- Wat is een DV? Wat is de orde van een DV?
  Wat is een (algemene) oplossing van een DV?
- Oplosmethode van volgende drie typen DV's:
  - Eerste orde lineaire DV: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$.
  - Separabele eerste orde DV: $p(y)y' = q(x)$.
  - Tweede orde lineaire DV met constante coëfficiënten en 'eenvoudig' rechterlid $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$
- NIEUW Bernoulli-vergelijking:
  $y'(x) + p(x)y(x) = g(x) \cdot (y(x))^r$.

Overzicht

Voor de DV $\quad y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$

Integrerende factor:

Voor de DV $\quad y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$

Integrerende factor:

- $P(x) = \int p(x)\,dx$

Voor de DV $\quad y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$

Integrerende factor:

- $P(x) = \int p(x)\,dx$
- $I(x) = e^{P(x)}$

Voor de DV $y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$

Integrerende factor:

- $P(x) = \int p(x)\,dx$
- $I(x) = e^{P(x)}$
- vermenigvuldig de hele DV met $I(x)$:

$$e^{P(x)}y'(x) + p(x)e^{P(x)}y(x) \quad = \quad g(x)e^{P(x)}$$

Voor de DV $y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$

Integrerende factor:

- $P(x) = \int p(x)\, dx$
- $I(x) = e^{P(x)}$
- vermenigvuldig de hele DV met $I(x)$:

$$\begin{aligned} e^{P(x)}y'(x) + p(x)e^{P(x)}y(x) &= g(x)e^{P(x)} \\ \frac{d}{dx}\left[e^{P(x)}y(x)\right] &= g(x)e^{P(x)} \end{aligned}$$

Voor de DV $\quad y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$

Integrerende factor:

- $P(x) = \int p(x)\,dx$
- $I(x) = e^{P(x)}$
- vermenigvuldig de hele DV met $I(x)$:

$$
\begin{aligned}
e^{P(x)}y'(x) + p(x)e^{P(x)}y(x) &= g(x)e^{P(x)} \\
\frac{d}{dx}\left[e^{P(x)}y(x)\right] &= g(x)e^{P(x)} \\
e^{P(x)}y(x) &= \int g(x)e^{P(x)}\,dx \ (+K)
\end{aligned}
$$

Voor de DV $y'(x) + p(x)y(x) = g(x)$

Integrerende factor:

- $P(x) = \int p(x)\,dx$
- $I(x) = e^{P(x)}$
- vermenigvuldig de hele DV met $I(x)$:

$$
\begin{aligned}
e^{P(x)}y'(x) + p(x)e^{P(x)}y(x) &= g(x)e^{P(x)} \\
\frac{d}{dx}\left[e^{P(x)}y(x)\right] &= g(x)e^{P(x)} \\
e^{P(x)}y(x) &= \int g(x)e^{P(x)}\,dx \; (+K)
\end{aligned}
$$

$$y(x) = e^{-P(x)}\left(\int g(x)e^{P(x)}\,dx + K\right)$$

Voorbeeld

Los op: $xy' + 2y = e^x$.

Voorbeeld

Los op: $xy' + 2y = e^x$.

In 'standaardvorm' schrijven: $y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x}$.

Voorbeeld

Los op: $\quad xy' + 2y = e^x.$

In 'standaardvorm' schrijven: $\quad y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x}.$

$p(x) = \frac{2}{x}$

Voorbeeld

Los op: $\quad xy' + 2y = e^x.$

In 'standaardvorm' schrijven: $\quad y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x}.$

$$p(x) = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow P(x) = \int \frac{2}{x}\,dx =$$

Voorbeeld

Los op: $xy' + 2y = e^x$.

In 'standaardvorm' schrijven: $y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x}$.

$$p(x) = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow P(x) = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln x$$

Voorbeeld

Los op: $xy' + 2y = e^x$.

In 'standaardvorm' schrijven: $y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x}$.

$$p(x) = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow P(x) = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln x \;\Rightarrow\; I(x) = e^{2\ln x} =$$

Voorbeeld

Los op: $xy' + 2y = e^x$.

In 'standaardvorm' schrijven: $y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x}$.

$$p(x) = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow P(x) = \int \frac{2}{x}\, dx = 2\ln x \;\Rightarrow\; I(x) = e^{2\ln x} = x^2.$$

Voorbeeld

Los op: $xy' + 2y = e^x$.

In 'standaardvorm' schrijven: $y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x}$.

$$p(x) = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow P(x) = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln x \ \Rightarrow \ I(x) = e^{2\ln x} = x^2.$$

Herschreven DV:

$$x^2y'(x) + 2xy'(x) = x^2\frac{e^x}{x}$$

Voorbeeld

Los op: $xy' + 2y = e^x$.

In 'standaardvorm' schrijven: $y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x}$.

$$p(x) = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow P(x) = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln x \;\Rightarrow\; I(x) = e^{2\ln x} = x^2.$$

Herschreven DV:

$$x^2y'(x) + 2xy'(x) = x^2\frac{e^x}{x} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\left[x^2y(x)\right] = x\,e^x$$

Voorbeeld

Los op: $xy' + 2y = e^x$.

In 'standaardvorm' schrijven: $y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x}$.

$$p(x) = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow P(x) = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln x \ \Rightarrow \ I(x) = e^{2\ln x} = x^2.$$

Herschreven DV:

$$x^2y'(x) + 2xy'(x) = x^2\frac{e^x}{x} \ \Leftrightarrow \ \frac{d}{dx}\left[x^2y(x)\right] = x\,e^x$$

$$\Leftrightarrow x^2y(x) = \int x\,e^x\,dx = \ldots =$$

Voorbeeld

Los op: $xy' + 2y = e^x$.

In 'standaardvorm' schrijven: $y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x}$.

$$p(x) = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow P(x) = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln x \;\Rightarrow\; I(x) = e^{2\ln x} = x^2.$$

Herschreven DV:

$$x^2y'(x) + 2xy'(x) = x^2\frac{e^x}{x} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\left[x^2y(x)\right] = x\,e^x$$

$$\Leftrightarrow x^2y(x) = \int x\,e^x\,dx = \ldots = (x-1)e^x + K$$

Voorbeeld

Los op: $xy' + 2y = e^x$.

In 'standaardvorm' schrijven: $y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^x}{x}$.

$$p(x) = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow P(x) = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln x \;\Rightarrow\; I(x) = e^{2\ln x} = x^2.$$

Herschreven DV:

$$x^2y'(x) + 2xy'(x) = x^2\frac{e^x}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[x^2y(x)\right] = x\,e^x$$

$$\Leftrightarrow x^2y(x) = \int x\,e^x\,dx = \ldots = (x-1)e^x + K$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2} + \frac{K}{x^2}$$

Voorbeeld

Los op: $xy' + 2y = e^x$.

In 'standaardvorm' schrijven: $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{e^x}{x}$.

$$p(x) = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow P(x) = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln x \;\Rightarrow\; I(x) = e^{2\ln x} = x^2.$$

Herschreven DV:

$$x^2y'(x) + 2xy'(x) = x^2\frac{e^x}{x} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\left[x^2y(x)\right] = x\,e^x$$

$$\Leftrightarrow x^2y(x) = \int x\,e^x\,dx = \ldots = (x-1)e^x + K$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2} + \frac{K}{x^2}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Overzicht

Een beetje precies omgaand met afhankelijke (y) en onafhankelijke (x) variabele:

Een beetje precies omgaand met afhankelijke (y) en onafhankelijke (x) variabele:

$$p(y)\,y' \quad = \quad q(x)$$

Een beetje precies omgaand met afhankelijke (y) en onafhankelijke (x) variabele:

$$
\begin{aligned}
p(y)\, y' &= q(x) \\
p(y(x))\, y'(x) &= q(x)
\end{aligned}
$$

Een beetje precies omgaand met afhankelijke (y) en onafhankelijke (x) variabele:

$$
\begin{aligned}
p(y)\, y' &= q(x) \\
p(y(x))\, y'(x) &= q(x) \\
\int p(y(x))\, y'(x)\, dx &= \int q(x)\, dx \quad \text{beide zijden primitiveren naar } x
\end{aligned}
$$

Een beetje precies omgaand met afhankelijke (y) en onafhankelijke (x) variabele:

$$
\begin{aligned}
p(y)\, y' &= q(x) \\
p(y(x))\, y'(x) &= q(x) \\
\int p(y(x))\, y'(x)\, dx &= \int q(x)\, dx \quad \text{beide zijden primitiveren naar } x \\
\int p(y(x))\, dy(x) &= \int q(x)\, dx \quad \text{substitutieregel!}
\end{aligned}
$$

Een beetje precies omgaand met afhankelijke (y) en onafhankelijke (x) variabele:

$$
\begin{aligned}
p(y)\,y' &= q(x) \\
p(y(x))\,y'(x) &= q(x) \\
\int p(y(x))\,y'(x)\,dx &= \int q(x)\,dx \quad \text{beide zijden primitiveren naar } x \\
\int p(y(x))\,dy(x) &= \int q(x)\,dx \quad \text{substitutieregel!} \\
P(y(x)) &= Q(x) + C \quad \textit{impliciete}\text{ oplossing}
\end{aligned}
$$

Een beetje precies omgaand met afhankelijke (y) en onafhankelijke (x) variabele:

$$
\begin{aligned}
p(y)\,y' &= q(x) \\
p(y(x))\,y'(x) &= q(x) \\
\int p(y(x))\,y'(x)\,dx &= \int q(x)\,dx \quad \text{beide zijden primitiveren naar } x \\
\int p(y(x))\,dy(x) &= \int q(x)\,dx \quad \text{substitutieregel!} \\
P(y(x)) &= Q(x) + C \quad \textit{impliciete}\text{ oplossing}
\end{aligned}
$$

En *soms* is de impliciete oplossing te herschrijven tot een expliciete oplossing $y(x) = \ldots$

Kort genoteerd:

Kort genoteerd:

$$p(y(x))\,y'(x) \quad = \quad q(x)$$

Kort genoteerd:

$$
\begin{aligned}
p(y(x))\, y'(x) &= q(x) \\
p(y)\, \frac{dy}{dx} &= q(x)
\end{aligned}
$$

Kort genoteerd:

$$
\begin{aligned}
p(y(x))\, y'(x) &= q(x) \\
p(y)\, \frac{dy}{dx} &= q(x) \\
p(y)\, dy &= q(x)\, dx
\end{aligned}
$$

Kort genoteerd:

$$
\begin{aligned}
p(y(x))\, y'(x) &= q(x) \\
p(y)\, \frac{dy}{dx} &= q(x) \\
p(y)\, dy &= q(x)\, dx \\
\int p(y)\; dy &= \int q(x)\, dx
\end{aligned}
$$

Kort genoteerd:

$$
\begin{aligned}
p(y(x))\, y'(x) &= q(x) \\
p(y)\, \frac{dy}{dx} &= q(x) \\
p(y)\, dy &= q(x)\, dx \\
\int p(y)\; dy &= \int q(x)\, dx \\
P(y) &= Q(x) + C \quad \textit{impliciete}\ \text{oplossing}
\end{aligned}
$$

Voorbeeld

DV: $x\,y' = 2x^2\,y^2 + xy^2$

Voorbeeld

DV: $x\,y' = 2x^2\,y^2 + xy^2$

Scheiden variabelen: deel door x en door y^2:

Voorbeeld

DV: $x\,y' = 2x^2\,y^2 + xy^2$

Scheiden variabelen: deel door x en door y^2: Apart: $y = 0$

$$\frac{1}{y^2}\,y' \;=\; 2x+1$$

Voorbeeld

DV: $x\,y' = 2x^2\,y^2 + xy^2$

Scheiden variabelen: deel door x en door y^2: Apart: $y = 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2}\,y' &= 2x+1 \\ \frac{1}{y^2}\,dy &= (2x+1)\,dx \end{aligned}$$

Voorbeeld

DV: $x\,y' = 2x^2\,y^2 + xy^2$

Scheiden variabelen: deel door x en door y^2: Apart: $y = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^2}\,y' &= 2x + 1 \\
\frac{1}{y^2}\,dy &= (2x + 1)\,dx \\
\int \frac{1}{y^2}\,dy &= \int (2x + 1)\,dx
\end{aligned}$$

Voorbeeld

DV: $x\,y' = 2x^2\,y^2 + xy^2$

Scheiden variabelen: deel door x en door y^2: Apart: $y = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^2}\,y' &= 2x+1 \\
\frac{1}{y^2}\,dy &= (2x+1)\,dx \\
\int \frac{1}{y^2}\,dy &= \int (2x+1)\,dx \\
\frac{-1}{y} &=
\end{aligned}$$

Voorbeeld

DV: $x\,y' = 2x^2\,y^2 + xy^2$

Scheiden variabelen: deel door x en door y^2: Apart: $y = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^2}\,y' &= 2x+1 \\
\frac{1}{y^2}\,dy &= (2x+1)\,dx \\
\int \frac{1}{y^2}\,dy &= \int (2x+1)\,dx \\
\frac{-1}{y} &= x^2 + x + C \qquad \text{impliciete oplossing}
\end{aligned}$$

Voorbeeld

DV: $x\,y' = 2x^2\,y^2 + xy^2$

Scheiden variabelen: deel door x en door y^2: Apart: $y = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^2}\,y' &= 2x+1 \\
\frac{1}{y^2}\,dy &= (2x+1)\,dx \\
\int \frac{1}{y^2}\,dy &= \int (2x+1)\,dx \\
\frac{-1}{y} &= x^2+x+C \qquad \text{impliciete oplossing} \\
y &=
\end{aligned}$$

Voorbeeld

DV: $x\,y' = 2x^2\,y^2 + xy^2$

Scheiden variabelen: deel door x en door y^2: Apart: $y = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^2}\,y' &= 2x+1 \\
\frac{1}{y^2}\,dy &= (2x+1)\,dx \\
\int \frac{1}{y^2}\,dy &= \int (2x+1)\,dx \\
\frac{-1}{y} &= x^2+x+C \qquad \text{impliciete oplossing} \\
y &= \frac{-1}{x^2+x+C} \qquad \text{expliciete oplossing}
\end{aligned}$$

Voorbeeld

DV: $x\,y' = 2x^2\,y^2 + xy^2$

Vanwege delen door x en door y^2: Apart bekijken: $y = 0$

$y = 0$ substitueren in de DV geeft:

Voorbeeld

DV: $x\,y' = 2x^2\,y^2 + xy^2$

Vanwege delen door x en door y^2: Apart bekijken: $y = 0$

$y = 0$ substitueren in de DV geeft: $x^2 \cdot 0 = 2x^2 \cdot 0^2 + x \cdot 0^2$

Voorbeeld

DV: $x\,y' = 2x^2\,y^2 + xy^2$

Vanwege delen door x en door y^2: Apart bekijken: $y = 0$

$y = 0$ substitueren in de DV geeft: $x^2 \cdot 0 = 2x^2 \cdot 0^2 + x \cdot 0^2$
en dat 'klopt'.

Voorbeeld

DV: $\quad x\,y' = 2x^2\,y^2 + xy^2$

Vanwege delen door x en door y^2: Apart bekijken: $y = 0$

$y = 0$ substitueren in de DV geeft: $\quad x^2 \cdot 0 = 2x^2 \cdot 0^2 + x \cdot 0^2$
en dat 'klopt'.

De algemene oplossing wordt:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{-1}{x^2 + x + C}, \quad C \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Overzicht

Stelling

Voor de 2de orde lineaire DV $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$, met (bijv. continu) rechterlid $g(x)$ gelden

1. De algemene oplossing van de homogene DV: $a\,y'' + b\,y' + cy = 0$

Stelling

Voor de 2de orde lineaire DV $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$, met (bijv. continu) rechterlid $g(x)$ gelden

1. De algemene oplossing van de homogene DV:
   $a\,y'' + b\,y' + cy = 0$

   is van de vorm

   $$y = y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

   met C_1, C_2 willekeurige (reële) constanten.

Stelling

Voor de 2de orde lineaire DV $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$, met (bijv. continu) rechterlid $g(x)$ gelden

1. De algemene oplossing van de homogene DV: $a\,y'' + b\,y' + cy = 0$

   is van de vorm

   $$y = y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

   met C_1, C_2 willekeurige (reële) constanten.

2. De algemene oplossing van de (niet-homogene) DV is van de vorm

Stelling

Voor de 2de orde lineaire DV $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$, met (bijv. continu) rechterlid $g(x)$ gelden

1. De algemene oplossing van de homogene DV: $a\,y'' + b\,y' + cy = 0$

   is van de vorm

   $$y = y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

   met C_1, C_2 willekeurige (reële) constanten.

2. De algemene oplossing van de (niet-homogene) DV is van de vorm

   $$y = y_P + y_H(x)$$

Stelling

Voor de 2de orde lineaire DV $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$, met (bijv. continu) rechterlid $g(x)$ gelden

1. De algemene oplossing van de homogene DV: $a\,y'' + b\,y' + cy = 0$

   is van de vorm
   $$y = y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$
   met C_1, C_2 willekeurige (reële) constanten.

2. De algemene oplossing van de (niet-homogene) DV is van de vorm
   $$y = y_P + y_H(x) = y_P(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$
   met C_1, C_2 willekeurige (reële) constanten.

Stelling

Voor de 2de orde lineaire DV $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$, met (bijv. continu) rechterlid $g(x)$ gelden

1. De algemene oplossing van de homogene DV: $a\,y'' + b\,y' + cy = 0$

   is van de vorm
   $$y = y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$
   met C_1, C_2 willekeurige (reëele) constanten.

2. De algemene oplossing van de (niet-homogene) DV is van de vorm
   $$y = y_P + y_H(x) = y_P(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$
   met C_1, C_2 willekeurige (reëele) constanten.

   y_P heet een particuliere (Eng: particular) oplossing.

Stelling

Voor de 2de orde lineaire DV $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$, met (bijv. continu) rechterlid $g(x)$ gelden

1. De algemene oplossing van de homogene DV:
   $a\,y'' + b\,y' + cy = 0$

   is van de vorm

   $$y = y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

   met C_1, C_2 willekeurige (reële) constanten.
2. De algemene oplossing van de (niet-homogene) DV is van de vorm

   $$y = y_P + y_H(x) = y_P(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

   met C_1, C_2 willekeurige (reële) constanten.

   y_P heet een particuliere (Eng: particular) oplossing.
3. Voor deel 3: volgende pagina!

Stelling

Voor de 2de orde lineaire DV $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$, met (bijv.) continu rechterlid $g(x)$) geldt

Stelling

Voor de 2de orde lineaire DV a y" + b y' + cy = g(x), met (bijv.) continu rechterlid $g(x)$) geldt

3. Er is een unieke oplossing die voldoet aan de beginvoorwaarden

$$y(x_0) = q_0, \;\; y'(x_0) = q_1,$$

Stelling

Voor de 2de orde lineaire DV $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$, met (bijv.) continu rechterlid $g(x)$) geldt

3. Er is een unieke oplossing die voldoet aan de beginvoorwaarden

$$y(x_0) = q_0, \;\; y'(x_0) = q_1,$$

m.a.w. dit type voorwaarden legt de parameters C_1 en C_2 uit de algemene oplossing vast.

Stelling

De oplossingen van de 2de orde homogene lineaire DV $a\,y'' + b\,y' + cy = 0$ zijn als volgt te bepalen:

Stelling

De oplossingen van de 2de orde homogene lineaire DV $a\,y'' + b\,y' + cy = 0$ zijn als volgt te bepalen:

Laat r_1, r_2 de oplossingen zijn van

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0 \quad \text{(de karakteristieke vergelijking)}$$

Stelling

De oplossingen van de 2de orde homogene lineaire DV $a\,y'' + b\,y' + cy = 0$ zijn als volgt te bepalen:

Laat r_1, r_2 de oplossingen zijn van

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0 \quad \text{(de karakteristieke vergelijking)}$$

1. Als $r_1 \neq r_2$ reëel zijn: $y_H = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad C_i \in \mathbb{R}$

Stelling

De oplossingen van de 2de orde homogene lineaire DV
$a\,y'' + b\,y' + cy = 0$ zijn als volgt te bepalen:

Laat r_1, r_2 de oplossingen zijn van

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0 \quad \text{(de karakteristieke vergelijking)}$$

1. Als $r_1 \neq r_2$ reëel zijn: $y_H = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad C_i \in \mathbb{R}$
2. Als $r_1 = r_2$: $y_H = C_1 e^{r_1 x} + C_2 \mathbf{x} e^{r_2 x}, \quad C_i \in \mathbb{R}$

Stelling

De oplossingen van de 2de orde homogene lineaire DV $a\,y'' + b\,y' + cy = 0$ zijn als volgt te bepalen:

Laat r_1, r_2 de oplossingen zijn van

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0 \quad \text{(de karakteristieke vergelijking)}$$

1. Als $r_1 \neq r_2$ reëel zijn: $y_H = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad C_i \in \mathbb{R}$
2. Als $r_1 = r_2$: $y_H = C_1 e^{r_1 x} + C_2 \mathbf{x} e^{r_2 x}, \quad C_i \in \mathbb{R}$
3. Als $r_{1,2} = \alpha \pm i\,\beta$, $\beta \neq 0$:
   $$y_H = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad C_i \in \mathbb{R}$$

Voorbeeld

DV: $y'' - 3y' - 10y = 0$

Voorbeeld

DV: $y'' - 3y' - 10y = 0$

Karakteristieke vgl: $r^2 - 3r - 10 = 0$

Voorbeeld

DV: $y'' - 3y' - 10y = 0$

Karakteristieke vgl: $r^2 - 3r - 10 = 0 \Longleftrightarrow (r-5)(r+2) = 0$

Voorbeeld

DV: $y'' - 3y' - 10y = 0$

Karakteristieke vgl: $r^2 - 3r - 10 = 0 \Longleftrightarrow (r-5)(r+2) = 0$
geeft $r_1 = 5,\ r_2 = -2.$

Voorbeeld

DV: $y'' - 3y' - 10y = 0$

Karakteristieke vgl: $r^2 - 3r - 10 = 0 \Longleftrightarrow (r-5)(r+2) = 0$
geeft $r_1 = 5,\ r_2 = -2.$

Oplossing van de DV:

Voorbeeld

DV: $y'' - 3y' - 10y = 0$

Karakteristieke vgl: $r^2 - 3r - 10 = 0 \iff (r-5)(r+2) = 0$
geeft $r_1 = 5$, $r_2 = -2$.

Oplossing van de DV: $y = C_1 e^{5x} + C_2\, e^{-2x}$, met $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld

DV: $y'' - 3y' - 10y = 0$

Karakteristieke vgl: $r^2 - 3r - 10 = 0 \Longleftrightarrow (r-5)(r+2) = 0$
geeft $r_1 = 5$, $r_2 = -2$.

Oplossing van de DV: $y = C_1 e^{5x} + C_2\, e^{-2x}$, met $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld

DV: $y'' - 4y' + 9y = 0$

Voorbeeld

DV: $y'' - 3y' - 10y = 0$

Karakteristieke vgl: $r^2 - 3r - 10 = 0 \Longleftrightarrow (r-5)(r+2) = 0$
geeft $r_1 = 5$, $r_2 = -2$.

Oplossing van de DV: $y = C_1 e^{5x} + C_2\, e^{-2x}$, met $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld

DV: $y'' - 4y' + 9y = 0$

Karakteristieke vgl: $r^2 - 4r + 9 = 0$

Voorbeeld

DV: $y'' - 3y' - 10y = 0$

Karakteristieke vgl: $r^2 - 3r - 10 = 0 \Longleftrightarrow (r-5)(r+2) = 0$
geeft $r_1 = 5$, $r_2 = -2$.

Oplossing van de DV: $y = C_1 e^{5x} + C_2\, e^{-2x}$, met $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld

DV: $y'' - 4y' + 9y = 0$

Karakteristieke vgl: $r^2 - 4r + 9 = 0$ geeft $r_{1,2} =$

Voorbeeld

DV: $y'' - 3y' - 10y = 0$

Karakteristieke vgl: $r^2 - 3r - 10 = 0 \iff (r-5)(r+2) = 0$
geeft $r_1 = 5$, $r_2 = -2$.

Oplossing van de DV: $y = C_1 e^{5x} + C_2\, e^{-2x}$, met $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld

DV: $y'' - 4y' + 9y = 0$

Karakteristieke vgl: $r^2 - 4r + 9 = 0$ geeft $r_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{5}$.

Oplossing van de DV:

Voorbeeld

DV: $y'' - 3y' - 10y = 0$

Karakteristieke vgl: $r^2 - 3r - 10 = 0 \Longleftrightarrow (r-5)(r+2) = 0$
geeft $r_1 = 5$, $r_2 = -2$.

Oplossing van de DV: $y = C_1 e^{5x} + C_2\, e^{-2x}$, met $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld

DV: $y'' - 4y' + 9y = 0$

Karakteristieke vgl: $r^2 - 4r + 9 = 0$ geeft $r_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{5}$.

Oplossing van de DV: $y = C_1\, e^{2x} \cos(\sqrt{5}x) + C_2\, e^{2x} \sin(\sqrt{5}x)$.

Het vinden van een particuliere oplossing:

1. Bij 'eenvoudig rechterlid': 'methode' van onbepaalde coëfficiënten.

Het vinden van een particuliere oplossing:

1. Bij 'eenvoudig rechterlid': 'methode' van onbepaalde coëfficiënten.
2. Algemeen: methode van variatie van coëfficiënten (B&DP §3.6; geen tentamenstof)

Het vinden van een particuliere oplossing:

1. Bij 'eenvoudig rechterlid': 'methode' van onbepaalde coëfficiënten.
2. Algemeen: methode van variatie van coëfficiënten (B&DP §3.6; geen tentamenstof)

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = 5\sin 2x.$

Het vinden van een particuliere oplossing:

1. Bij 'eenvoudig rechterlid': 'methode' van onbepaalde coëfficiënten.
2. Algemeen: methode van variatie van coëfficiënten (B&DP §3.6; geen tentamenstof)

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = 5\sin 2x.$

De homogene vgl heeft oplossing $y_H =$

Het vinden van een particuliere oplossing:

1. Bij 'eenvoudig rechterlid': 'methode' van onbepaalde coëfficiënten.
2. Algemeen: methode van variatie van coëfficiënten (B&DP §3.6; geen tentamenstof)

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = 5\sin 2x.$

De homogene vgl heeft oplossing $y_H = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

Het vinden van een particuliere oplossing:

1. Bij 'eenvoudig rechterlid': 'methode' van onbepaalde coëfficiënten.
2. Algemeen: methode van variatie van coëfficiënten (B&DP §3.6; geen tentamenstof)

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = 5\sin 2x.$

De homogene vgl heeft oplossing $y_H = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x.$

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

Het vinden van een particuliere oplossing:

1. Bij ‘eenvoudig rechterlid’: ‘methode’ van onbepaalde coëfficiënten.
2. Algemeen: methode van variatie van coëfficiënten (B&DP §3.6; geen tentamenstof)

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = 5\sin 2x.$

De homogene vgl heeft oplossing $y_H = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

Het vinden van een particuliere oplossing:

1. Bij 'eenvoudig rechterlid': 'methode' van onbepaalde coëfficiënten.
2. Algemeen: methode van variatie van coëfficiënten (B&DP §3.6; geen tentamenstof)

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = 5\sin 2x$.

De homogene vgl heeft oplossing $y_H = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|r} y_P & = & A\sin 2x + B\cos 2x & 1 \\ y_P' & = & (-2B)\sin 2x + (2A)\cos 2x & -2 \end{array}$$

Het vinden van een particuliere oplossing:

1. Bij 'eenvoudig rechterlid': 'methode' van onbepaalde coëfficiënten.
2. Algemeen: methode van variatie van coëfficiënten (B&DP §3.6; geen tentamenstof)

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = 5\sin 2x.$

De homogene vgl heeft oplossing $y_H = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x.$

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c} y_P &=& A\sin 2x + B\cos 2x & 1 \\ y_P' &=& (-2B)\sin 2x + (2A)\cos 2x & -2 \\ y_P'' &=& (-4A)\sin 2x + (-4B)\cos 2x & 1 \end{array}$$

Het vinden van een particuliere oplossing:

1. Bij ‘eenvoudig rechterlid’: ‘methode’ van onbepaalde coëfficiënten.
2. Algemeen: methode van variatie van coëfficiënten (B&DP §3.6; geen tentamenstof)

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = 5\sin 2x.$

De homogene vgl heeft oplossing $y_H = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c} y_P &=& A\sin 2x + B\cos 2x & 1 \\ y_P' &=& (-2B)\sin 2x + (2A)\cos 2x & -2 \\ y_P'' &=& (-4A)\sin 2x + (-4B)\cos 2x & 1 \\ \hline y_P'' - 2y_P' + 1y_P &=& & \end{array}$$

Het vinden van een particuliere oplossing:

1. Bij 'eenvoudig rechterlid': 'methode' van onbepaalde coëfficiënten.
2. Algemeen: methode van variatie van coëfficiënten (B&DP §3.6; geen tentamenstof)

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = 5\sin 2x.$

De homogene vgl heeft oplossing $y_H = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x.$

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

y'_P en y''_P berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c}
y_P & = & A\sin 2x + B\cos 2x & 1 \\
y'_P & = & (-2B)\sin 2x + (2A)\cos 2x & -2 \\
y''_P & = & (-4A)\sin 2x + (-4B)\cos 2x & 1 \\
\hline
y''_P - 2y'_P + 1y_P & = & (-3A + 4B)\sin(2x) + (-4A - 3B)\cos 2x &
\end{array}$$

Voorbeeld

$$y'' - 2y' + y = 5\sin(2x) + 0\cos(2x).$$

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = 5\sin(2x) + 0\cos(2x).$

De homogene vgl heeft oplossing $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c}
y_P & = & A\sin 2x + B\cos 2x & 1 \\
y_P' & = & (-2B)\sin 2x + (2A)\cos 2x & -2 \\
y_P'' & = & (-4A)\sin 2x + (-4B)\cos 2x & 1 \\
\hline
y_P'' - 2y_P' + 1y_P & = & (-3A + 4B)\sin(2x) + (-4A - 3B)\cos 2x &
\end{array}$$

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = 5\sin(2x) + 0\cos(2x).$

De homogene vgl heeft oplossing $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c}
y_P & = & A\sin 2x + B\cos 2x & 1 \\
y_P' & = & (-2B)\sin 2x + (2A)\cos 2x & -2 \\
y_P'' & = & (-4A)\sin 2x + (-4B)\cos 2x & 1 \\
\hline
y_P'' - 2y_P' + 1y_P & = & (-3A+4B)\sin(2x) + (-4A-3B)\cos 2x &
\end{array}$$

y_P voldoet als $\begin{cases} -3A + 4B = 5 \\ -4A - 3B = 0 \end{cases}$

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = 5\sin(2x) + 0\cos(2x).$

De homogene vgl heeft oplossing $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c}
y_P & = & A\sin 2x + B\cos 2x & 1 \\
y_P' & = & (-2B)\sin 2x + (2A)\cos 2x & -2 \\
y_P'' & = & (-4A)\sin 2x + (-4B)\cos 2x & 1 \\
\hline
y_P'' - 2y_P' + 1y_P & = & (-3A + 4B)\sin(2x) + (-4A - 3B)\cos 2x &
\end{array}$$

y_P voldoet als $\begin{cases} -3A + 4B = 5 \\ -4A - 3B = 0 \end{cases}$ Dit geeft: $\begin{cases} A = -\frac{3}{5} \\ B = \frac{4}{5} \end{cases}$

De algemene oplossing wordt:

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = 5\sin(2x) + 0\cos(2x)$.

De homogene vgl heeft oplossing $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c} y_P & = & A\sin 2x + B\cos 2x & 1 \\ y_P' & = & (-2B)\sin 2x + (2A)\cos 2x & -2 \\ y_P'' & = & (-4A)\sin 2x + (-4B)\cos 2x & 1 \\ \hline y_P'' - 2y_P' + 1y_P & = & (-3A + 4B)\sin(2x) + (-4A - 3B)\cos 2x & \end{array}$$

y_P voldoet als $\begin{cases} -3A + 4B = 5 \\ -4A - 3B = 0 \end{cases}$ Dit geeft: $\begin{cases} A = -\frac{3}{5} \\ B = \frac{4}{5} \end{cases}$

De algemene oplossing wordt:

$$y = y_P + y_H = -\tfrac{3}{5}\sin(2x) + \tfrac{4}{5}\cos(2x) + C_1 e^x + C_2\, x\, e^x.$$

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = xe^{2x}$

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = xe^{2x} = 1xe^{2x} + 0\,e^{2x}.$

De homogene vgl heeft (nog steeds) opl. $y = C_1 e^x + C_2\,x\,e^x.$

Voorbeeld

$$y'' - 2y' + y = xe^{2x} = 1xe^{2x} + 0\,e^{2x}.$$

De homogene vgl heeft (nog steeds) opl. $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

Voorbeeld

$$y'' - 2y' + y = xe^{2x} = 1xe^{2x} + 0\, e^{2x}.$$

De homogene vgl heeft (nog steeds) opl. $\quad y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x.$

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = Ax\, e^{2x} + B\, e^{2x}.$$

Voorbeeld

$$y'' - 2y' + y = xe^{2x} = \color{red}{1}xe^{2x} + \color{red}{0}\, e^{2x}.$$

De homogene vgl heeft (nog steeds) opl. $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$\color{blue}{y_P = Ax\, e^{2x} + B\, e^{2x}}.$$

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|r} y_P & = & Ax\, e^{2x} + B\, e^{2x} & 1 \\ y_P' & = & 2Ax\, e^{2x} + (A + 2B)\, e^{2x} & -2 \end{array}$$

Voorbeeld

$$y'' - 2y' + y = xe^{2x} = {\color{red}1}xe^{2x} + {\color{red}0}\, e^{2x}.$$

De homogene vgl heeft (nog steeds) opl. $\quad y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = Ax\, e^{2x} + B\, e^{2x}.$$

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c}
y_P & = & Ax\, e^{2x} + B\, e^{2x} & 1 \\
y_P' & = & 2Ax\, e^{2x} + (A + 2B)\, e^{2x} & -2 \\
y_P'' & = & 4Ax\, e^{2x} + (4A + 4B)\, e^{2x} & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = xe^{2x} = 1xe^{2x} + 0\, e^{2x}.$

De homogene vgl heeft (nog steeds) opl. $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x.$

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = Ax\, e^{2x} + B\, e^{2x}.$$

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c} y_P & = & Ax\, e^{2x} + B\, e^{2x} & 1 \\ y_P' & = & 2Ax\, e^{2x} + (A + 2B)\, e^{2x} & -2 \\ y_P'' & = & 4Ax\, e^{2x} + (4A + 4B)\, e^{2x} & 1 \\ \hline y_P'' - 2y_P' + 1y_P & = & & \end{array}$$

Voorbeeld

$$y'' - 2y' + y = xe^{2x} = 1xe^{2x} + 0\, e^{2x}.$$

De homogene vgl heeft (nog steeds) opl. $\quad y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x.$

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = Ax\, e^{2x} + B\, e^{2x}.$$

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c}
y_P & = & Ax\, e^{2x} + B\, e^{2x} & 1 \\
y_P' & = & 2Ax\, e^{2x} + (A + 2B)\, e^{2x} & -2 \\
y_P'' & = & 4Ax\, e^{2x} + (4A + 4B)\, e^{2x} & 1 \\
\hline
y_P'' - 2y_P' + 1y_P & = & 1Ax\, e^{2x} + (2A + B)\, e^{2x} &
\end{array}$$

Voorbeeld

$$y'' - 2y' + y = xe^{2x} = 1xe^{2x} + 0\, e^{2x}.$$

De homogene vgl heeft (nog steeds) opl. $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = Ax\, e^{2x} + B\, e^{2x}.$$

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|r}
y_P & = & Ax\, e^{2x} + B\, e^{2x} & 1 \\
y_P' & = & 2Ax\, e^{2x} + (A + 2B)\, e^{2x} & -2 \\
y_P'' & = & 4Ax\, e^{2x} + (4A + 4B)\, e^{2x} & 1 \\
\hline
y_P'' - 2y_P' + 1y_P & = & 1Ax\, e^{2x} + (2A + B)\, e^{2x} &
\end{array}$$

y_P voldoet als $\begin{cases} A & = & 1 \\ 2A + B & = & 0 \end{cases}$

Voorbeeld

$y'' - 2y' + y = xe^{2x} = 1xe^{2x} + 0\, e^{2x}.$

De homogene vgl heeft (nog steeds) opl. $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x.$

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = Ax\, e^{2x} + B\, e^{2x}.$$

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c} y_P & = & Ax\, e^{2x} + B\, e^{2x} & 1 \\ y_P' & = & 2Ax\, e^{2x} + (A+2B)\, e^{2x} & -2 \\ y_P'' & = & 4Ax\, e^{2x} + (4A+4B)\, e^{2x} & 1 \\ \hline y_P'' - 2y_P' + 1y_P & = & 1Ax\, e^{2x} + (2A+B)\, e^{2x} & \end{array}$$

y_P voldoet als $\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases}$ Dit geeft: $\begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$

De algemene oplossing wordt:

Voorbeeld

$$y'' - 2y' + y = xe^{2x} = 1xe^{2x} + 0\,e^{2x}.$$

De homogene vgl heeft (nog steeds) opl. $y = C_1 e^x + C_2\,x\,e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = Ax\,e^{2x} + B\,e^{2x}.$$

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c}
y_P & = & Ax\,e^{2x} + B\,e^{2x} & 1 \\
y_P' & = & 2Ax\,e^{2x} + (A+2B)\,e^{2x} & -2 \\
y_P'' & = & 4Ax\,e^{2x} + (4A+4B)\,e^{2x} & 1 \\
\hline
y_P'' - 2y_P' + 1y_P & = & 1Ax\,e^{2x} + (2A+B)\,e^{2x} &
\end{array}$$

y_P voldoet als $\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases}$ Dit geeft: $\begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$

De algemene oplossing wordt:

$$y = y_P + y_H = x\,e^{2x} - 2\,e^{2x} + C_1 e^x + C_2\,x\,e^x.$$

Voorbeeld

$y'' - 2y + y = e^x$.

De homogene vgl heeft (wederom) opl. $\quad y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Voorbeeld

$y'' - 2y + y = e^x$.

De homogene vgl heeft (wederom) opl. $\quad y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

Voorbeeld

$y'' - 2y + y = e^x$.

De homogene vgl heeft (wederom) opl. $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = Ax^2\, e^x.$$

$y_P = A\, e^x$ of $y_P = Ax\, e^x$ hebben geen zin. (Why?)

Voorbeeld

$y'' - 2y + y = e^x$.

De homogene vgl heeft (wederom) opl. $\quad y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = Ax^2\, e^x.$$

$y_P = A\, e^x$ of $y_P = Ax\, e^x$ hebben geen zin. (Why?)

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|r} y_P & = & Ax^2\, e^x & 1 \\ y_P' & = & 2Ax\, e^x + Ax^2\, e^x & -2 \end{array}$$

Voorbeeld

$y'' - 2y + y = e^x$.

De homogene vgl heeft (wederom) opl. $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = Ax^2\, e^x.$$

$y_P = A\, e^x$ of $y_P = Ax\, e^x$ hebben geen zin. (Why?)

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c} y_P & = & Ax^2\, e^x & 1 \\ y_P' & = & 2Ax\, e^x + Ax^2\ e^x & -2 \\ y_P'' & = & 2A\, e^x + 4Ax\, e^x + Ax^2\ e^x & 1 \\ \hline \end{array}$$

Voorbeeld

$y'' - 2y + y = e^x.$

De homogene vgl heeft (wederom) opl. $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x.$

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = Ax^2\, e^x.$$

$y_P = A\, e^x$ of $y_P = Ax\, e^x$ hebben geen zin. (Why?)

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c} y_P & = & Ax^2\, e^x & 1 \\ y_P' & = & 2Ax\, e^x + Ax^2\; e^x & -2 \\ y_P'' & = & 2A\, e^x + 4Ax\, e^x + Ax^2\; e^x & 1 \\ \hline y_P'' - 2y_P' + 1y_P & = & & \end{array}$$

Voorbeeld

$y'' - 2y + y = e^x.$

De homogene vgl heeft (wederom) opl. $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x.$

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = Ax^2\, e^x.$$

$y_P = A\, e^x$ of $y_P = Ax\, e^x$ hebben geen zin. (Why?)

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c}
y_P & = & Ax^2\, e^x & 1 \\
y_P' & = & 2Ax\, e^x + Ax^2\; e^x & -2 \\
y_P'' & = & 2A\, e^x + 4Ax\, e^x + Ax^2\; e^x & 1 \\
\hline
y_P'' - 2y_P' + 1y_P & = & 0Ax^2\, e^x + 0Ax\, e^x + 2A\, e^x &
\end{array}$$

Voorbeeld

$y'' - 2y + y = e^x$.

De homogene vgl heeft (wederom) opl. $\quad y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = Ax^2\, e^x.$$

$y_P = A\, e^x$ of $y_P = Ax\, e^x$ hebben geen zin. (Why?)

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c}
y_P & = & Ax^2\, e^x & 1 \\
y_P' & = & 2Ax\, e^x + Ax^2\, e^x & -2 \\
y_P'' & = & 2A\, e^x + 4Ax\, e^x + Ax^2\, e^x & 1 \\
\hline
y_P'' - 2y_P' + 1y_P & = & 0Ax^2\, e^x + 0Ax\, e^x + 2A\, e^x &
\end{array}$$

y_P voldoet als

Voorbeeld

$y'' - 2y + y = e^x$.

De homogene vgl heeft (wederom) opl. $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = Ax^2\, e^x.$$

$y_P = A\, e^x$ of $y_P = Ax\, e^x$ hebben geen zin. (Why?)

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c}
y_P & = & Ax^2\, e^x & 1 \\
y_P' & = & 2Ax\, e^x + Ax^2\, e^x & -2 \\
y_P'' & = & 2A\, e^x + 4Ax\, e^x + Ax^2\, e^x & 1 \\
\hline
y_P'' - 2y_P' + 1y_P & = & 0Ax^2\, e^x + 0Ax\, e^x + 2A\, e^x &
\end{array}$$

y_P voldoet als $A = \frac{1}{2}$.

Voorbeeld

$y'' - 2y + y = e^x.$

De homogene vgl heeft (wederom) opl. $\quad y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x.$

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = Ax^2\, e^x.$$

$y_P = A\, e^x$ of $y_P = Ax\, e^x$ hebben geen zin. (Why?)

y'_P en y''_P berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c} y_P & = & Ax^2\, e^x & 1 \\ y'_P & = & 2Ax\, e^x + Ax^2\, e^x & -2 \\ y''_P & = & 2A\, e^x + 4Ax\, e^x + Ax^2\, e^x & 1 \\ \hline y''_P - 2y'_P + 1y_P & = & 0Ax^2\, e^x + 0Ax\, e^x + 2A\, e^x & \end{array}$$

y_P voldoet als $A = \frac{1}{2}$. De algemene oplossing wordt:

Voorbeeld

$y'' - 2y + y = e^x$.

De homogene vgl heeft (wederom) opl. $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$.

Zoek een particuliere oplossing in de vorm

$$y_P = Ax^2\, e^x.$$

$y_P = A\, e^x$ of $y_P = Ax\, e^x$ hebben geen zin. (Why?)

y_P' en y_P'' berekenen en invullen in DV:

$$\begin{array}{rcl|c}
y_P & = & Ax^2\, e^x & 1 \\
y_P' & = & 2Ax\, e^x + Ax^2\, e^x & -2 \\
y_P'' & = & 2A\, e^x + 4Ax\, e^x + Ax^2\, e^x & 1 \\
\hline
y_P'' - 2y_P' + 1y_P & = & 0Ax^2\, e^x + 0Ax\, e^x + 2A\, e^x &
\end{array}$$

y_P voldoet als $A = \frac{1}{2}$. De algemene oplossing wordt:

$$y = y_P + y_H = \frac{1}{2}x^2\, e^x + C_1 e^x + C_2\, x\, e^x.$$

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Indien $g(x) =$ Probeer $y_P =$

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Indien $g(x) =$	Probeer $y_P =$
ax^n	

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Indien $g(x) =$	Probeer $y_P =$
ax^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_1 x + A_0$

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Indien $g(x) =$	Probeer $y_P =$
ax^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_1 x + A_0$
e^{ax}	

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Indien $g(x) =$	Probeer $y_P =$
ax^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_1 x + A_0$
e^{ax}	Ae^{ax}

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Indien $g(x) =$	Probeer $y_P =$
ax^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_1 x + A_0$
e^{ax}	Ae^{ax} tenzij dit al een homogene opl. is

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Indien $g(x) =$	Probeer $y_P =$
ax^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_1 x + A_0$
e^{ax}	Ae^{ax} tenzij dit al een homogene opl. is
	in dat geval:

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Indien $g(x) =$	Probeer $y_P =$
ax^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_1 x + A_0$
e^{ax}	Ae^{ax} tenzij dit al een homogene opl. is
	in dat geval: probeer Axe^{ax} of evt. Ax^2e^{ax}

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Indien $g(x) =$	Probeer $y_P =$
ax^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_1 x + A_0$
e^{ax}	Ae^{ax} tenzij dit al een homogene opl. is
	in dat geval: probeer Axe^{ax} of evt. Ax^2e^{ax}
$\cos(ax)$	

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Indien $g(x) =$	Probeer $y_P =$
ax^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_1 x + A_0$
e^{ax}	Ae^{ax} tenzij dit al een homogene opl. is
	in dat geval: probeer Axe^{ax} of evt. Ax^2e^{ax}
$\cos(ax)$	$A\cos(ax) + B\sin(ax)$

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Indien $g(x) =$	Probeer $y_P =$
ax^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_1 x + A_0$
e^{ax}	Ae^{ax} tenzij dit al een homogene opl. is
	in dat geval: probeer Axe^{ax} of evt. Ax^2e^{ax}
$\cos(ax)$	$A\cos(ax) + B\sin(ax)$ tenzij dit al homogene opln. zijn

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Indien $g(x) =$	Probeer $y_P =$
ax^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_1 x + A_0$
e^{ax}	Ae^{ax} tenzij dit al een homogene opl. is
	in dat geval: probeer Axe^{ax} of evt. Ax^2e^{ax}
$\cos(ax)$	$A\cos(ax) + B\sin(ax)$ tenzij dit al homogene opln. zijn
	in dat geval:

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Indien $g(x) =$	Probeer $y_P =$
ax^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_1 x + A_0$
e^{ax}	Ae^{ax} tenzij dit al een homogene opl. is
	in dat geval: probeer Axe^{ax} of evt. Ax^2e^{ax}
$\cos(ax)$	$A\cos(ax) + B\sin(ax)$ tenzij dit al homogene opln. zijn
	in dat geval: probeer $Ax\cos(ax) + Bx\sin(ax)$

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Indien $g(x) =$	Probeer $y_P =$
ax^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_1 x + A_0$
e^{ax}	Ae^{ax} tenzij dit al een homogene opl. is
	in dat geval: probeer Axe^{ax} of evt. Ax^2e^{ax}
$\cos(ax)$	$A\cos(ax) + B\sin(ax)$ tenzij dit al homogene opln. zijn
	in dat geval: probeer $Ax\cos(ax) + Bx\sin(ax)$
xe^{ax}	

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Indien $g(x) =$	Probeer $y_P =$
ax^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_1 x + A_0$
e^{ax}	Ae^{ax} tenzij dit al een homogene opl. is
	in dat geval: probeer Axe^{ax} of evt. Ax^2e^{ax}
$\cos(ax)$	$A\cos(ax) + B\sin(ax)$ tenzij dit al homogene opln. zijn
	in dat geval: probeer $Ax\cos(ax) + Bx\sin(ax)$
xe^{ax}	$Axe^{ax} + Be^{ax}$

"Methode van Onbepaalde Coëfficiënten"

Ook wel genoemd: Methode van slim proberen"

Doel: y_P bepalen voor $a\,y'' + b\,y' + cy = g(x)$

Indien $g(x) =$	Probeer $y_P =$
ax^n	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_1 x + A_0$
e^{ax}	Ae^{ax} tenzij dit al een homogene opl. is
	in dat geval: probeer Axe^{ax} of evt. Ax^2e^{ax}
$\cos(ax)$	$A\cos(ax) + B\sin(ax)$ tenzij dit al homogene opln. zijn
	in dat geval: probeer $Ax\cos(ax) + Bx\sin(ax)$
xe^{ax}	$Axe^{ax} + Be^{ax}$ tenzij ....

Overzicht

Bernoulli DV: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x) \cdot (y(x))^r$

Bernoulli DV: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x) \cdot (y(x))^r$

Delen door $(y(x))^r$ geeft:

Bernoulli DV: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x) \cdot (y(x))^r$

Delen door $(y(x))^r$ geeft: $\dfrac{y'(x)}{(y(x))^r} + p(x)(y(x))^{1-r} = g(x).$

Bernoulli DV: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x) \cdot (y(x))^r$

Delen door $(y(x))^r$ geeft: $\dfrac{y'(x)}{(y(x))^r} + p(x)(y(x))^{1-r} = g(x).$

De **truc**: stel $v(x) = (y(x))^{1-r}$.

Bernoulli DV: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x) \cdot (y(x))^r$

Delen door $(y(x))^r$ geeft: $\dfrac{y'(x)}{(y(x))^r} + p(x)(y(x))^{1-r} = g(x).$

De **truc**: stel $v(x) = (y(x))^{1-r}$.

Dan $v'(x) =$

Bernoulli DV: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x) \cdot (y(x))^r$

Delen door $(y(x))^r$ geeft: $\dfrac{y'(x)}{(y(x))^r} + p(x)(y(x))^{1-r} = g(x)$.

De **truc**: stel $v(x) = (y(x))^{1-r}$.

Dan $v'(x) = (1-r)y'(x)(y(x))^{-r}$

Bernoulli DV: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x) \cdot (y(x))^r$

Delen door $(y(x))^r$ geeft: $\dfrac{y'(x)}{(y(x))^r} + p(x)(y(x))^{1-r} = g(x)$.

De **truc**: stel $v(x) = (y(x))^{1-r}$.

Dan $v'(x) = (1-r)y'(x)(y(x))^{-r} = (1-r)\dfrac{y'(x)}{(y(x))^r}$.

Bernoulli DV: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x) \cdot (y(x))^r$

Delen door $(y(x))^r$ geeft: $\dfrac{y'(x)}{(y(x))^r} + p(x)(y(x))^{1-r} = g(x)$.

De **truc**: stel $v(x) = (y(x))^{1-r}$.

Dan $v'(x) = (1-r)y'(x)(y(x))^{-r} = (1-r)\dfrac{y'(x)}{(y(x))^r}$.

Substitutie in de DV geeft

$$\frac{1}{1-r}v'(x) + p(x)\,v(x) = g(x),$$

Bernoulli DV: $y'(x) + p(x)y(x) = g(x) \cdot (y(x))^r$

Delen door $(y(x))^r$ geeft: $\dfrac{y'(x)}{(y(x))^r} + p(x)(y(x))^{1-r} = g(x).$

De **truc**: stel $v(x) = (y(x))^{1-r}$.

Dan $v'(x) = (1-r)y'(x)(y(x))^{-r} = (1-r)\dfrac{y'(x)}{(y(x))^r}$.

Substitutie in de DV geeft

$$\frac{1}{1-r} v'(x) + p(x)\, v(x) = g(x),$$

een **lineaire 1ste orde DV!**

Voorbeeld

Gevraagd: oplossing van $y' + 2y = xy^3$.

Voorbeeld

Gevraagd: oplossing van $y' + 2y = xy^3$.

Delen door y^3 en $v(x) = 1/y(x)^2$ stellen:

$$\frac{y'}{y^3} + 2\frac{1}{y^2} = x$$

Voorbeeld

Gevraagd: oplossing van $y' + 2y = xy^3$.

Delen door y^3 en $v(x) = 1/y(x)^2$ stellen:

$$\frac{y'}{y^3} + 2\frac{1}{y^2} = x \;\Rightarrow\; -\tfrac{1}{2}v' + 2v = x.$$

Voorbeeld

Gevraagd: oplossing van $y' + 2y = xy^3$.

Delen door y^3 en $v(x) = 1/y(x)^2$ stellen:

$$\frac{y'}{y^3} + 2\frac{1}{y^2} = x \;\Rightarrow\; -\tfrac{1}{2}v' + 2v = x.$$

Oplossing van de (lin.) DV: $v(x) = \dots$

Voorbeeld

Gevraagd: oplossing van $y' + 2y = xy^3$.

Delen door y^3 en $v(x) = 1/y(x)^2$ stellen:

$$\frac{y'}{y^3} + 2\frac{1}{y^2} = x \;\Rightarrow\; -\tfrac{1}{2}v' + 2v = x.$$

Oplossing van de (lin.) DV: $v(x) = \ldots = C\,e^{4x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$.

Voorbeeld

Gevraagd: oplossing van $y' + 2y = xy^3$.

Delen door y^3 en $v(x) = 1/y(x)^2$ stellen:

$$\frac{y'}{y^3} + 2\frac{1}{y^2} = x \;\Rightarrow\; -\tfrac{1}{2}v' + 2v = x.$$

Oplossing van de (lin.) DV: $v(x) = \ldots = C\,e^{4x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$.

Terug naar $y(x)$:

Voorbeeld

Gevraagd: oplossing van $y' + 2y = xy^3$.

Delen door y^3 en $v(x) = 1/y(x)^2$ stellen:

$$\frac{y'}{y^3} + 2\frac{1}{y^2} = x \;\Rightarrow\; -\tfrac{1}{2}v' + 2v = x.$$

Oplossing van de (lin.) DV: $v(x) = \ldots = C\,e^{4x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$.

Terug naar $y(x)$:

$$v = \frac{1}{y^2} \;\Rightarrow\; y(x) = \frac{1}{\pm\sqrt{v(x)}} =$$

Voorbeeld

Gevraagd: oplossing van $y' + 2y = xy^3$.

Delen door y^3 en $v(x) = 1/y(x)^2$ stellen:

$$\frac{y'}{y^3} + 2\frac{1}{y^2} = x \;\Rightarrow\; -\tfrac{1}{2}v' + 2v = x.$$

Oplossing van de (lin.) DV: $v(x) = \ldots = C\,e^{4x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$.

Terug naar $y(x)$:

$$v = \frac{1}{y^2} \;\Rightarrow\; y(x) = \frac{1}{\pm\sqrt{v(x)}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{C\,e^{4x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}}},$$

Voorbeeld

Gevraagd: oplossing van $y' + 2y = xy^3$.

Delen door y^3 en $v(x) = 1/y(x)^2$ stellen:

$$\frac{y'}{y^3} + 2\frac{1}{y^2} = x \ \Rightarrow\ -\tfrac{1}{2}v' + 2v = x.$$

Oplossing van de (lin.) DV: $v(x) = \ldots = C\,e^{4x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$.

Terug naar $y(x)$:

$$v = \frac{1}{y^2} \ \Rightarrow\ y(x) = \frac{1}{\pm\sqrt{v(x)}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{C\,e^{4x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}}},\quad C \in \mathbb{R}.$$

If time permits . . .

Opgave

Los op:

(1) $xy' - y = 2x^3 + x^2, \;\; y(1) = 0$

(2) $y' - (1 + x)y^2 = 0, \;\; y(0) = 2$

(3) $y' - xy = xy^2$

(4) $y'' + y = 2xe^x$

If time permits . . .

Opgave

Los op:

(1) $xy' - y = 2x^3 + x^2, \quad y(1) = 0$

(2) $y' - (1+x)y^2 = 0, \quad y(0) = 2$

(3) $y' - xy = xy^2$

(4) $y'' + y = 2xe^x$

Antwoorden:

(1) $y = x^3 + x^2 - 2x$

(2) $y = \dfrac{-2}{x^2 + 2x - 1}$

(3) $y = \dfrac{1}{-1 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2}}$

(4) $y = (x-1)e^x + C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$