Niet-lineaire autonome stelsels

October 7, 2011

Definitie

Een niet-lineair stelsel $\begin{cases} x'(t) = & F(x,y,t) \\ y'(t) = & G(x,y,t) \end{cases}$ kortweg $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ heet autonoom als

Definitie

Een niet-lineair stelsel $\begin{cases} x'(t) = & F(x,y,t) \\ y'(t) = & G(x,y,t) \end{cases}$ kortweg $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ heet autonoom als $\mathbf{F}$ niet expliciet van t afhangt.

Definitie

Een niet-lineair stelsel $\begin{cases} x'(t) = & F(x,y,t) \\ y'(t) = & G(x,y,t) \end{cases}$ kortweg $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ heet autonoom als $\mathbf{F}$ niet expliciet van t afhangt.

Opmerking

Bij een autonoom stelsel hangt de baan die een oplossing vanuit een punt $\mathbf{x}^0$ gaat doorlopen niet af van het tijdstip waarop wordt gestart.

Definitie

Een niet-lineair stelsel $\begin{cases} x'(t) = & F(x,y,t) \\ y'(t) = & G(x,y,t) \end{cases}$ kortweg $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ heet autonoom als $\mathbf{F}$ niet expliciet van t afhangt.

Opmerking

Bij een autonoom stelsel hangt de baan die een oplossing vanuit een punt $\mathbf{x}^0$ gaat doorlopen niet af van het tijdstip waarop wordt gestart.

Definitie

Een punt $\mathbf{a}$ waar $\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ heet een evenwichtspunt of rustpunt van het autonome stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Linearisering

Definitie (zie Analyse 3!)

De linearisering van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in een punt $\mathbf{a} = (a, b)$ wordt gegeven door

Linearisering

Definitie (zie Analyse 3!)

De linearisering van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in een punt $\mathbf{a} = (a, b)$ wordt gegeven door

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b)$$

Linearisering

Definitie (zie Analyse 3!)

De linearisering van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in een punt $\mathbf{a} = (a, b)$ wordt gegeven door

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b)$$

Stelling

Als f differentieerbaar is in (a, b) dan geldt

$$f(x, y) - L(x, y) = \varepsilon_1(x, y)(x - a) + \varepsilon_2(x, y) \cdot (y - b)$$

met $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon_i(x, y) = 0, \;\; i = 1, 2.$

Linearisering

Definitie (zie Analyse 3!)

De linearisering van een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in een punt $\mathbf{a} = (a, b)$ wordt gegeven door

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b)$$

Stelling

Als f differentieerbaar is in (a, b) dan geldt

$$f(x, y) - L(x, y) = \varepsilon_1(x, y)(x - a) + \varepsilon_2(x, y) \cdot (y - b)$$

met $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2.$

Met andere woorden: de linearisering van f in (a, b) geeft een goede benadering van f.

Linearisering van een niet-lineair stelsel

Definitie

De linearisering van het stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ rond een evenwichtspunt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ wordt gegeven door

$$\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \text{met } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Definitie

De linearisering van het stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ rond een evenwichtspunt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ wordt gegeven door

$$\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \text{met } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Uitgeschreven

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) \\ y' = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) \end{cases}$$

Linearisering van een niet-lineair stelsel

Definitie

De linearisering van het stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ rond een evenwichtspunt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ wordt gegeven door

$$\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \text{met } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Uitgeschreven

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) \\ y' = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) \end{cases}$$

Opmerking

$\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ is ook te schrijven als $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$

Wat zegt het gelineariseerde stelsel over de evenwichtspunten?

Opmerking

De evenwichtspunten spelen een hoofdrol in het fasediagram.

Wat zegt het gelineariseerde stelsel over de evenwichtspunten?

Opmerking

De evenwichtspunten spelen een hoofdrol in het fasediagram.

Het gedrag rond een evenwichtspunt (*knoop*, *zadelpunt*, *spiraalpunt*, *stabiel/instabiel*) wordt grotendeels bepaald door het gedrag van het gelineariseerde stelsel (mits $\det(A) \neq 0$).

Wat zegt het gelineariseerde stelsel over de evenwichtspunten?

Opmerking

De evenwichtspunten spelen een hoofdrol in het fasediagram.

Het gedrag rond een evenwichtspunt (*knoop, zadelpunt, spiraalpunt, stabiel/instabiel*) wordt grotendeels bepaald door het gedrag van het gelineariseerde stelsel (mits $\det(A) \neq 0$).

Stelling

De aard van een rustpunt van het stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ is gelijk aan dat van het gelineariseerde stelsel $\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, uitgezonderd in de volgende gevallen

Wat zegt het gelineariseerde stelsel over de evenwichtspunten?

Opmerking

De evenwichtspunten spelen een hoofdrol in het fasediagram.

Het gedrag rond een evenwichtspunt (*knoop, zadelpunt, spiraalpunt, stabiel/instabiel*) wordt grotendeels bepaald door het gedrag van het gelineariseerde stelsel (mits $\det(A) \neq 0$).

Stelling

De aard van een rustpunt van het stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ is gelijk aan dat van het gelineariseerde stelsel $\mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, uitgezonderd in de volgende gevallen

- De matrix A is singulier;
- De matrix A heeft een dubbele eigenwaarde;
- De matrix A heeft een zuiver imaginaire eigenwaarde: $\lambda = b\,i$.

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval I: twee verschillende reële eigenwaarden:

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval I: twee verschillende reële eigenwaarden:

	linearisering	niet-lineaire systeem
$\lambda_1 \neq \lambda_2$, reëel $\lambda_1, \lambda_2 > 0$	knoop, instabiel	

Geval I: twee verschillende reëele eigenwaarden:

	linearisering	niet-lineaire systeem
$\lambda_1 \neq \lambda_2$, reëel $\lambda_1, \lambda_2 > 0$	knoop, instabiel	idem

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval I: twee verschillende reëele eigenwaarden:

	linearisering	niet-lineaire systeem
$\lambda_1 \neq \lambda_2$, reëel		
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	knoop, instabiel ook wel: 'source'	idem
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	knoop, stabiel ook wel: 'sink'	idem
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	zadelpunt, instabiel	idem

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval I: twee verschillende reële eigenwaarden:

	linearisering	niet-lineaire systeem
$\lambda_1 \neq \lambda_2$, reëel		
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	knoop, instabiel ook wel: 'source'	idem
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	knoop, stabiel ook wel: 'sink'	idem
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	zadelpunt, instabiel	idem

NB. dit beschrijft voor een niet-lineair stelsel alleen het **lokale** gedrag.

Geval II: twee samenvallende reële eigenwaarden:

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval II: twee samenvallende reëele eigenwaarden:

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ er zijn 2 onafh. e.v.n:	'star point', instabiel	

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval II: twee samenvallende reëele eigenwaarden:

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ er zijn 2 onafh. e.v.n:	'star point', instabiel	idem of instabiele knoop of spiraalpt.

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval II: twee samenvallende reëele eigenwaarden:

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$		
er zijn 2 onafh. e.v.n:	'star point', instabiel	idem of instabiele knoop of spiraalpt.
er is maar 1 onafh. e.v.	oneigenlijke knoop; instabiel	idem of instabiel spiraalpunt

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval II: twee samenvallende reële eigenwaarden:

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$		
er zijn 2 onafh. e.v.n:	'star point', instabiel	idem of instabiele knoop of spiraalpt.
er is maar 1 onafh. e.v.	oneigenlijke knoop; instabiel	idem of instabiel spiraalpunt
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$		
er zijn 2 onafh. e.v.n:	'star point', stabiel	idem of stabiele knoop of spiraalpt
er is maar 1 onafh. e.v.	oneigenlijke knoop; stabiel	idem of stabiel spiraalpunt

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval III: twee complexe eigenwaarden:

Aard van rustpunten gelineariseerd vs. niet-gelineariseerd.

Geval III: twee complexe eigenwaarden:

	linearisering	niet-lineaire systeem
$\lambda_{1,2} = a \pm b\,i$		
$a > 0$	spiraalpunt; instabiel;	idem
$a < 0$	spiraalpunt; stabiel;	idem
$a = 0$	centrum; stabiel; (periodieke oplossingen)	idem of spiraalpunt

Voorbeeld

Bekijk het stelsel $\begin{cases} x' &= (2+x)(x-y) \\ y' &= (1-y)(x+y) \end{cases}$

Gevraagd:

Voorbeeld

Bekijk het stelsel $\begin{cases} x' &= (2+x)(x-y) \\ y' &= (1-y)(x+y) \end{cases}$

Gevraagd:

- De rustpunten;
- De aard van de rustpunten;
- Een schets van oplossingen in het fasevlak (consistent met het bovenstaande!)

Voorbeeld

Bekijk het stelsel $\begin{cases} x' &= (2+x)(x-y) \\ y' &= (1-y)(x+y) \end{cases}$

Gevraagd:

- De rustpunten;
- De aard van de rustpunten;
- Een schets van oplossingen in het fasevlak (consistent met het bovenstaande!)

Voorbeeld

Doe hetzelfde voor het stelsel $\begin{cases} x' &= (1-y)(x+y) \\ y' &= (2+x)(x-y) \end{cases}$

(Lijkt erg op 't vorige!)

Definitie

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{x}_0$ blijven.

nog wat terminologie

Definitie

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{x}_0$ blijven.

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet asymptotisch stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ voor $t \to \infty$ naderen tot $\mathbf{x}_0$.

Definitie

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{x}_0$ blijven.

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet asymptotisch stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ voor $t \to \infty$ naderen tot $\mathbf{x}_0$.

Opmerking

Voor lineaire stelsels $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ het (enige) rustpunt $(0, 0)$ is

stabiel als

nog wat terminologie

Definitie

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet stabiel als oplossingen die starten ‘in de buurt van’ $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{x}_0$ blijven.

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet asymptotisch stabiel als oplossingen die starten ‘in de buurt van’ $\mathbf{x}_0$ voor $t \to \infty$ naderen tot $\mathbf{x}_0$.

Opmerking

Voor lineaire stelsels $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ het (enige) rustpunt $(0,0)$ is

stabiel als alle eigenwaarden van A een niet-positief reëel deel hebben

Definitie

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{x}_0$ blijven.

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet asymptotisch stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ voor $t \to \infty$ naderen tot $\mathbf{x}_0$.

Opmerking

Voor lineaire stelsels $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ het (enige) rustpunt $(0, 0)$ is

stabiel als alle eigenwaarden van A een niet-positief reëel deel hebben
(stabiele (oneigenlijke) knoop, stabiel spiraalpunt of centrum

nog wat terminologie

Definitie

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{x}_0$ blijven.

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet asymptotisch stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ voor $t \to \infty$ naderen tot $\mathbf{x}_0$.

Opmerking

Voor lineaire stelsels $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ het (enige) rustpunt $(0, 0)$ is

stabiel als alle eigenwaarden van A een niet-positief reëel deel hebben
(stabiele (oneigenlijke) knoop, stabiel spiraalpunt of centrum

en **asymptotisch stabiel** als

nog wat terminologie

Definitie

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{x}_0$ blijven.

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet asymptotisch stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ voor $t \to \infty$ naderen tot $\mathbf{x}_0$.

Opmerking

Voor lineaire stelsels $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ het (enige) rustpunt $(0, 0)$ is

stabiel als alle eigenwaarden van A een niet-positief reëel deel hebben
(stabiele (oneigenlijke) knoop, stabiel spiraalpunt of centrum

en **asymptotisch stabiel** als alle eigenwaarden van A een negatief reëel deel hebben

Definitie

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ in de buurt van $\mathbf{x}_0$ blijven.

Een rustpunt $\mathbf{x}_0$ heet asymptotisch stabiel als oplossingen die starten 'in de buurt van' $\mathbf{x}_0$ voor $t \to \infty$ naderen tot $\mathbf{x}_0$.

Opmerking

Voor lineaire stelsels $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ het (enige) rustpunt $(0, 0)$ is

stabiel als alle eigenwaarden van A een niet-positief reëel deel hebben
(stabiele (oneigenlijke) knoop, stabiel spiraalpunt of centrum

en **asymptotisch stabiel** als alle eigenwaarden van A een negatief reëel deel hebben
(stabiele (oneigenlijke) knoop, stabiel spiraalpunt

nog wat meer terminologie

Definitie

Een oplossing heet periodiek met periode T als geldt

$$x(t+T) = x(t),\; y(t+T) = y(t), \quad \text{of: } \mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t).$$

nog wat meer terminologie

Definitie

Een oplossing heet periodiek met periode T als geldt

$$x(t+T) = x(t),\ y(t+T) = y(t), \quad \text{of: } \mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t).$$

De baan is dan een **gesloten** kromme.

Definitie

Een oplossing heet periodiek met periode T als geldt

$$x(t+T) = x(t),\ y(t+T) = y(t), \quad \text{of: } \mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t).$$

De baan is dan een **gesloten** kromme.

Opmerking

Bij een lineair stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$: treedt dit alleen op als

Definitie

Een oplossing heet periodiek met periode T als geldt

$x(t+T) = x(t),\ y(t+T) = y(t),$ of: $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t).$

De baan is dan een **gesloten** kromme.

Opmerking

Bij een lineair stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$: treedt dit alleen op als $\lambda_{1,2} = \pm b\, i$:

algemene oplossing:

nog wat meer terminologie

Definitie

Een oplossing heet periodiek met periode T als geldt

$$x(t+T) = x(t),\ y(t+T) = y(t), \quad \text{of: } \mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t).$$

De baan is dan een **gesloten** kromme.

Opmerking

Bij een lineair stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$: treedt dit alleen op als $\lambda_{1,2} = \pm b\,i$:

algemene oplossing: $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = c_1\mathbf{v}_1 \cos(b\,t) + c_2\mathbf{v}_2 \sin(b\,t)$

nog wat meer terminologie

Definitie

Een oplossing heet periodiek met periode T als geldt

$$x(t+T) = x(t),\ y(t+T) = y(t), \quad \text{of: } \mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t).$$

De baan is dan een **gesloten** kromme.

Opmerking

Bij een lineair stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$: treedt dit alleen op als $\lambda_{1,2} = \pm b\, i$:

algemene oplossing: $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = c_1\mathbf{v}_1 \cos(b\,t) + c_2\mathbf{v}_2 \sin(b\,t)$

Merk op: alle oplossingen zijn dan periodiek!

nog wat meer terminologie

Opmerking

Bij niet-lineaire stelsels kan een limietcyclus optreden: een periodieke oplossing waarnaar elke oplossing die start in de buurt van de baan van deze oplossing naar convergeert.

Twee "moeilijke" stellingen

Bekijk het stelsel $dx/dt = F(x,y),\ dy/dt = G(x,y)$

Neem aan: F en G zijn netjes (continue partiële afgeleiden)

Stelling (9.7.1)

Een gesloten baankromme van het stelsel omsluit **ten minste één** rustpunt.

Twee "moeilijke" stellingen

Bekijk het stelsel $dx/dt = F(x, y),\ dy/dt = G(x, y)$

Neem aan: F en G zijn netjes (continue partiële afgeleiden)

Stelling (9.7.1)

Een gesloten baankromme van het stelsel omsluit **ten minste één** rustpunt.

Als dit **precies één** rustpunt is, dan is dat **niet** een zadelpunt.

Twee "moeilijke" stellingen

Bekijk het stelsel $dx/dt = F(x, y), \; dy/dt = G(x, y)$

Neem aan: F en G zijn netjes (continue partiële afgeleiden)

Stelling (9.7.1)

Een gesloten baankromme van het stelsel omsluit **ten minste één** rustpunt.

Als dit **precies één** rustpunt is, dan is dat **niet** een zadelpunt.

Stelling (9.7.3, losjes geformuleerd)

Als een oplossing $x = \phi(t), \; y = \psi(t)$ voor $t \to \infty$ binnen een **begrensd** gebied R blijft, dat **geen rustpunten bevat**,

Twee "moeilijke" stellingen

Bekijk het stelsel $dx/dt = F(x, y)$, $dy/dt = G(x, y)$

Neem aan: F en G zijn netjes (continue partiële afgeleiden)

Stelling (9.7.1)

Een gesloten baankromme van het stelsel omsluit **ten minste één** rustpunt.

Als dit **precies één** rustpunt is, dan is dat **niet** een zadelpunt.

Stelling (9.7.3, losjes geformuleerd)

Als een oplossing $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ voor $t \to \infty$ binnen een **begrensd** gebied R blijft, dat **geen rustpunten bevat**,

dan is het óf een periodieke oplossing óf

Twee "moeilijke" stellingen

Bekijk het stelsel $dx/dt = F(x, y), \; dy/dt = G(x, y)$

Neem aan: F en G zijn netjes (continue partiële afgeleiden)

Stelling (9.7.1)

Een gesloten baankromme van het stelsel omsluit **ten minste één** rustpunt.

Als dit **precies één** rustpunt is, dan is dat **niet** een zadelpunt.

Stelling (9.7.3, losjes geformuleerd)

Als een oplossing $x = \phi(t), \; y = \psi(t)$ voor $t \to \infty$ binnen een **begrensd** gebied R blijft, dat **geen rustpunten bevat**,

dan is het óf een periodieke oplossing óf $x = \phi(t), \; y = \psi(t)$ spiraliseert naar de baan van een periodiek oplossing.

Voorbeeld

Bekijk het stelsel $\begin{cases} x' &= (2+x)(x-y) \\ y' &= (1-y)(x+y) \end{cases}$

Gevraagd:

Voorbeeld

Bekijk het stelsel $\begin{cases} x' & = (2+x)(x-y) \\ y' & = (1-y)(x+y) \end{cases}$

Gevraagd:

- De rustpunten;
- De aard van de rustpunten;
- Een schets van oplossingen in het fasevlak (consistent met het bovenstaande!)

Voorbeeld

Bekijk het stelsel $\begin{cases} x' &= (2+x)(x-y) \\ y' &= (1-y)(x+y) \end{cases}$

Gevraagd:

- De rustpunten;
- De aard van de rustpunten;
- Een schets van oplossingen in het fasevlak (consistent met het bovenstaande!)

Voorbeeld

Doe hetzelfde voor het stelsel $\begin{cases} x' &= (1-y)(x+y) \\ y' &= (2+x)(x-y) \end{cases}$

(Lijkt erg op 't vorige!)

Voorbeeld

$$\begin{cases} x' &= (1-y)(x+y) \\ y' &= (2+x)(x-y) \end{cases}$$

De rustpunten zijn dezelfde: $(0{,}0)$, $(1{,}1)$, $(-2,\ 2)$ en $(-2,\ 2)$;

en de Jacobiaan:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-y & 1-x-2y \\ 2+2x-y & 2+x \end{bmatrix}$$ geeft

achtereenvolgens

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad J(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix},$$

$$J(-2,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad J(-2,2) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deze matrices hebben de eigenwaarden

$$\lambda_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{17}, \quad \lambda_{1,2} = -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2} i\sqrt{15},$$
$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}, \qquad \lambda_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{17}$$

Voorbeeld

Uit de eigenwaarden lezen we af: voor de linearisering geldt:

in (0,0): een zadelpunt; in (1,1): (stabiel) spiraalpunt;
(−2,1): een centrum; (−2,2): een zadelpunt;

Drie van de vier rustpunten van het niet-lineaire stelsel vertonen hetzelfde kwalitatieve gedrag, alleen in het punt (−2,2) is het gedrag nog niet eenduidig: spiraalpunt (stabiel of instabiel) of centrum.

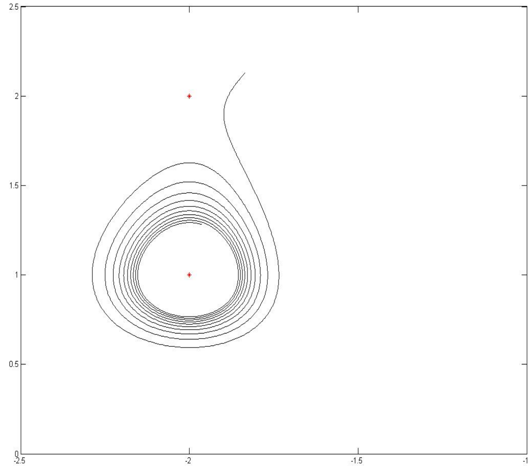
De eigenvectoren liggen een stuk rottiger dan in de eerdere opgave (eigenlijk: niet te doen!).

Wel kun je nagaan dat in het punt (1,1) de draairichting linksom is:

$$\mathbf{F}(1,1+\varepsilon) = \begin{bmatrix} -\varepsilon(2+\varepsilon) \\ (3+\varepsilon)\cdot(-\varepsilon) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -2\varepsilon \\ -3-\varepsilon \end{bmatrix}, \text{ of:}$$

$$J(1,1)\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\varepsilon \\ -3\varepsilon \end{bmatrix}.$$ De draairichting is: linksom.

Gedrag rond het rustpunt $(-2, 1)$



Op grond van het plaatje is niet echt goed te zien of $(-2, 1)$ een centrum of een (stabiel) spiraalpunt is.