Bundel opgaves

B. Tijhof

1 a. stelsel is strijdig wanneer het een lege verzameling is, oftewel wanneer links een nul staat en rechts een getal ($0 \wedge \neq 0$)

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ x + \alpha y &= 5 \\ 2x + 5y - z &= \beta \end{aligned} \;\rightarrow\; \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & \alpha & 0 & 5 \\ 2 & 5 & -1 & \beta \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \\ -2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \alpha-2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \beta-4 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \alpha-2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \beta-4 \end{array}\right] \uparrow -\alpha+2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\alpha+3 & (\beta-4)(-\alpha+2)+3 \\ 0 & 1 & 1 & \beta-4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \beta-4 \\ 0 & 0 & -\alpha+3 & (\beta-4)(-\alpha+2)+3 \end{array}\right]$$

dus stelsel strijdig wanneer

$$\begin{aligned} -\alpha + 3 &= 0 \\ -\alpha &= -3 \\ \alpha &= 3 \end{aligned} \qquad \wedge \qquad \begin{aligned} (\beta-4)(-\alpha+2)+3 &\neq 0 \\ -\beta\alpha + 2\beta + 4\alpha - 8 + 3 &\neq 0 \\ -\beta\alpha + 2\beta + 4\alpha - 5 &\neq 0 \\ -\beta \cdot 3 + 2\beta + 4 \cdot 3 &\neq -5 \\ -\beta &\neq -7 \text{, dus } \beta \neq 7 \end{aligned}$$

b. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & -1 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \\ -2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \downarrow -1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

x_3 is vrije variabele, dus druk x_1, x_2 en x_3 in x_3 uit:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \rightarrow x_1 + 6 - 0 = 2 \rightarrow x_1 = -4 \\ x_2 + x_3 &= 3 \rightarrow x_2 = 3 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{, dus } \underline{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= x_3 \\ x_2 &= 3 - x_3 \\ x_1 &= 2 - 2(3 - x_3) + x_3 = -4 + 3x_3 \end{aligned} \text{, dus } \underline{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

② a. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & p^2-13p+24 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & p-1 \end{array}\right]$

strijdig wanneer het een lege verzameling is, oftewel $0 \wedge \neq 0$
ik benoem $p^2 - 13p + 24$ als a

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & a & 2 \\ 3 & 7 & 1 & p-1 \end{array}\right] \xrightarrow{-,\ -3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & a+2 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & p-13 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & a+2 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}a+6 & p-12 \end{array}\right]$

vul a terug in

dus strijdig als $-\frac{1}{2}a + 6 = 0 \quad \wedge \quad p-12 \neq 0$

$-\frac{1}{2}a = -6 \qquad p \neq 12$

$\frac{1}{2}a = 6$

$a = 12$

$p^2 - 13p + 24 = 12$

$p^2 - 13p + 12 = 0$

$(p-12)(p-1) = 0$

$p = 12 \vee p = 1 \quad \wedge \quad p \neq 12$

dus systeem is strijdig voor $p = 1$

b. stelsel heeft oneindig veel oplossingen als ware bewering, dus $0 = 0$

$-\frac{1}{2}a + 6 = 0 \quad \wedge \quad p - 12 = 0$

$p = 12 \vee p = 1 \quad \wedge \quad p = 12$

dus voor $p = 12$ heeft stelsel ∞ oplossingen.

3 stelsel is oplosbaar als links $\neq 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & \alpha+2 & 2 \\ 1 & -1 & \alpha-1 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{-1,\ -3,\ -1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1-\alpha & 3-\alpha & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha+2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1-\alpha & -2 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1-\alpha & 3-\alpha & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha+2 & 2 \\ 0 & 0 & -\alpha & 2-2\alpha & -2 \end{array}\right] \updownarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1-\alpha & 3-\alpha & 4 \\ 0 & 0 & -\alpha & 2-2\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha+2 & 2 \end{array}\right]$$

dus $-2\alpha+2 \neq 0$

$-2\alpha \neq -2$

$\alpha \neq 1$

4 a. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ is een lineaire combinatie van $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ en $\underline{a}_3$ als de vectoren van elkaar gemaakt kunnen worden, oftewel oplosbaar is.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{-1,\ -2,\ -2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right] \updownarrow \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{-1,\ -2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

, dus systeem is niet strijdig.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ is een lineaire combinatie van a_1, a_2, a_3

b. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ is $\in$ Span $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2$ als er een lineare combinatie mogelijk is.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -1 \\ \downarrow \\ -1 \\ \downarrow \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -2 \\ \downarrow \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -1 & -1 \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{matrix} 2x_3 = -1 \\ -x_3 = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x_3 = -\tfrac{1}{2} \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

stelsel is strijdig, dus vector is $\notin$ span $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$

5 a) $\underline{b} \in \text{Span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4\}$ als er een lineaire combinatie mogelijk is. Oftewel als het stelsel oplosbaar is en niet strijdig.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & -1 & 0 & 28 \\ -16 & 11 & 2 & -3 & -110 \\ -7 & 5 & 1 & -1 & -49 \\ 14 & -9 & -2 & 3 & \beta+85 \end{array}\right] \begin{matrix} \downarrow 4 \\ \\ \downarrow 2 \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & -1 & 0 & 28 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & 1 & -1 & -49 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \beta-13 \end{array}\right] \begin{matrix} \downarrow 7/4 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & -1 & 0 & 28 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1/4 & -3/4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \beta-13 \end{array}\right] \downarrow -1/4 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & -1 & 0 & 28 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & \beta-11 \end{array}\right] \downarrow -8 \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & -1 & 0 & 28 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-7 \end{array}\right]$$

, dus $\beta - 7 = 0$ anders strijdig
$\beta = 7$

voor $\beta = 7$ is stelsel oplosbaar. Dus voor $\beta = 7$ is $b \in \text{Span}$ $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4\}$

b) $Ax = \underline{c}$ is oplosbaar als niet strijdig

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & -1 & 0 & C_1 \\ -16 & 11 & 2 & -3 & C_2 \\ -7 & 5 & 1 & -1 & C_3 \\ 14 & -9 & -2 & 3 & C_4 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{zelfde stappen als a geeft}} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & -1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & C_2 + 4C_1 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & C_3 + 7/4 C_1 - 1/4(C_2 + 4C_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_4 + 2C_3 + C_2 + 4C_1 - 8(C_3 + 7/4 C_1 - 1/4(C_2 + 4C_1)) \end{array}\right]$$

dus oplosbaar alleen als $C_4 + 2C_3 + C_2 + 4C_1 - 8C_3 - 14C_1 + C_2 + 8C_1 = 0$

du. voor $C_4 - 6C_3 + 2C_2 - 2C_1 = 0$ is het stelsel oplosbaar.

(6) Het stelsel is lineair afhankelijk wanneer er een lineaire combinatie mogelijk is. Oftewel wanneer een kolom geen pivot heeft.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2y \\ 2 & 2y & 32 \\ -3 & -3y & -12y \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \downarrow \\ \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ \downarrow \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2y \\ 0 & 2y-6 & 32-4y \\ 0 & -3y+9 & -6y \end{bmatrix} \begin{matrix} 1\tfrac{1}{2} \\ \downarrow \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 2y \\ 0 & \boxed{2y-6} & 32-4y \\ 0 & 0 & \boxed{48-12y} \end{bmatrix}$$

pivots $\rightarrow \square$

dus geen pivot als $2y-6=0 \quad \vee \quad 48-12y=0$

$2y=6 \quad \vee \quad -12y=-48$

$y=3 \quad \vee \quad y=4$

Dus stelsel is lineair afhankelijk voor $y=3 \vee y=4$

(7) Onafhankelijk; oftewel een lineaire combinatie is niet mogelijk, en daarmee moet het stelsel vectoren strijdig zijn en niet oplosbaar.

$\{(\underline{a}_2+\underline{a}_3)-(\underline{a}_1+\underline{a}_3)-(\underline{a}_1+\underline{a}_2)\} \neq 0$

$\{(-2\underline{a}_1)\} \neq 0$, Dus de vectorvergelijking

$c_1(\underline{a}_2+\underline{a}_3)+c_2(\underline{a}_1+\underline{a}_3)+c_3(\underline{a}_1+\underline{a}_2) \neq 0$ en heeft daarmee een triviale oplossing en het stelsel $\{\underline{a}_2+\underline{a}_3, \underline{a}_1+\underline{a}_3, \underline{a}_1+\underline{a}_2\}$ is lineair onafhankelijk en daarmee is de stelling juist.

8

$$NUL(A) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 5 & -2 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 5 & -2 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \downarrow -\tfrac{1}{4} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{4} & 5 & -2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-\tfrac{1}{4}} & \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_3, x_4 en x_5 is vrij, dus geen pivot → afhankelijk

dus x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 uitdrukken in x_3, x_4 en x_5

$$4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 0$$

$$-\tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 = 0 \rightarrow -\tfrac{1}{4}x_2 = -\tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4$$

$$x_2 = 2x_3 - 2x_4$$

$$4x_1 = -5x_2 + 2x_3 - 6x_4$$

$$4x_1 = -5(2x_3 - 2x_4) + 2x_3 - 6x_4$$

$$4x_1 = -10x_3 + 10x_4 + 2x_3 - 6x_4$$

$$x_1 = -2\tfrac{1}{2}x_3 + 2\tfrac{1}{2}x_4 + \tfrac{1}{2}x_3 - 1\tfrac{1}{2}x_4$$

$$x_1 = -2x_3 - x_4$$

$$\begin{array}{l} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \\ x_4 = \\ x_5 = \end{array} \begin{bmatrix} -2x_3 - x_4 \\ 2x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \rightarrow x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, dus basis $NUL(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

9 W is een lineaire deelruimte als:

1. $\vec{0} \in H$
2. het bestand is tegen op en aftellen
3. het bestand is tegen scalair vermenigvuldigen

$W = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \}$

1. $\vec{0} \in H$, ja!

2 $x_1 \quad x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_3 - 2x_2 + x_1 = 0$

$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0$, dus som ligt in W

en dus bestand tegen optellen en aftrekken.

3 $\alpha(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0) \rightarrow \alpha x_1 - \alpha x_2 + 2\alpha x_3 - 2\alpha x_4 = 0$, dus bestand tegen scalair vermenigvuldigen

10 $\dim(NUL(F))$ = hoeveelheid afhankelijke kolommen → dus zonder pivot positie.

$$\left.\begin{array}{l} \text{max hoeveelheid} = 8 \\ \text{min hoeveelheid} = 5 \end{array}\right\} \quad \begin{bmatrix} \boxed{x_1} & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x & \boxed{x} & x & x & x & x & x & x \\ x & x & \boxed{x} & x & x & x & x & x \end{bmatrix}$$

Dus $5 \leq p \leq 8$

(11) a. Er zijn geen free variables. Er zijn 4 kolommen, dus 3 pivots. Dan blijft er nog 1 over → $\text{Dim}(\text{Nul}(B)) = 1$, dus er geldt: $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + (b_1 - b_2 + b_3)x_4 = 0$

$(x_1 + x_4)b_1 + (x_2 - x_4)b_2 + (x_3 + x_4)b_3 = 0$, dus

$$x_1 + x_4 = 0$$
$$x_2 - x_4 = 0 \quad \rightarrow$$
$$x_3 + x_4 = 0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}\right]$$

, dus x_4 is vrije variabele, druk x_1, x_2, x_3 en x_4 uit in x_4

$$x_1 = -x_4$$
$$x_2 = x_4$$
$$x_3 = -x_4$$
$$x_4 = x_4$$

, geeft $x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dus basis $\text{NUL}(B) = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

b. rang = dimensie v/d kolomruimte v/d matrix
dimensie = # basis vectoren = # onafhankelijke vectoren
↳ met pivot pos.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{array}\right]$$

→ 3 pivot pos., dus dimensie = 3, dus rang = 3

12

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \rightarrow n = 3$$

$\dim(NUL(A)) + \dim(COL(A)) = n$

$\dim(NUL(A))$ = # afhankelijke kolommen
$\dim(COL(A))$ = # onafhankelijke kolommen

, dus als $NUL(A) = COL(A)$, dan is $\dim(NUL(A)) + \dim(COL(A)) \neq n$

, dus stelling is juist, voor een 3×3 matrix is $NUL(A) \neq COL(A)$

13 $[\underline{x}]_A$ betekent: bereken de coordinaten die nodig zijn om x te kunnen maken uit de basis A.

er moet gelden $\underline{x} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$

$3b_1 + 4b_2 + b_3 = \lambda_1 \cdot (4b_1 - b_2) + \lambda_2 \cdot (-\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3) + \lambda_3 \cdot (\underline{b}_2 - 2\underline{b}_3)$
$3b_1 + 4b_2 + b_3 = (4\lambda_1 - \lambda_2)\, b_1 + (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\, b_2 + (\lambda_2 - 2\lambda_3)\, b_3$

, dus
$$\begin{aligned} 4\lambda_1 - \lambda_2 &= 3 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 4 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 &= 1 \end{aligned} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} 1/4 \\ -4/3 \end{array} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3/4 & 1 & 4\,3/4 \\ 0 & 0 & -3\,1/3 & -5\,1/3 \end{array}\right]$$, dus

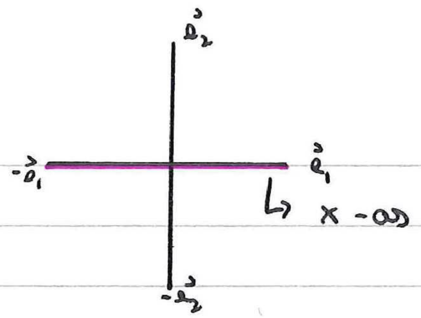
$-3\,1/3\ \lambda_3 = -5\,1/3$
$\lambda_3 = 1\,3/5$

$3/4\ \lambda_2 + 1\,3/5 = 4\,3/4$
$\lambda_2 = 4\,1/5$

$4\lambda_1 - 4\,1/5 = 3$
$\lambda_1 = 1\,4/5$, dus $[X]_A = \begin{bmatrix} 9/5 \\ 21/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}$

14 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



1) representatie matrix

$\vec{e}_1 \xrightarrow{\text{rotatie } \pi \text{ rad}} -\vec{e}_1 \xrightarrow{\text{projectie x-as}} -\vec{e}_1$

$\vec{e}_2 \xrightarrow{\text{rotatie } \pi \text{ rad}} -\vec{e}_2 \xrightarrow{\text{projectie x-as}} (0,0)$

dus repr. matrix = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2) voorschrift $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, dus $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$x_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 0x_2 \\ 0x_1 + 0x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = T(\vec{x})$

3) lineariteit als :

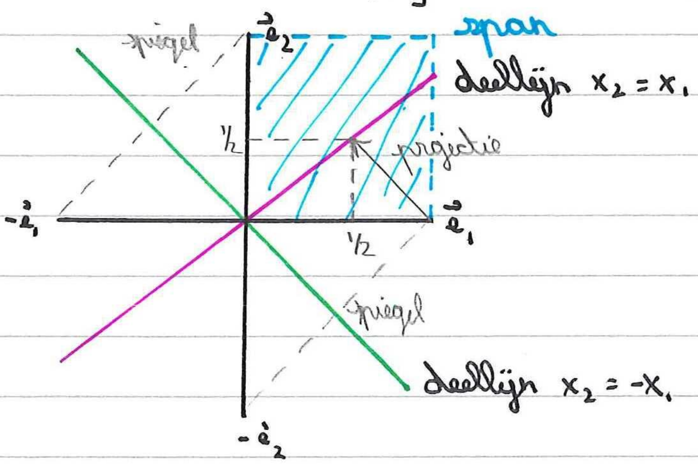
- $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$ $\rightarrow T(\alpha\vec{x}) = A(\alpha\vec{x}) = \alpha A(\vec{x})$ ✓

$\rightarrow T(\alpha\vec{x}) = \alpha T(\vec{x})$ $\rightarrow T(\vec{x}+\vec{y}) = A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$ ✓

- $T(\vec{0})_n \Rightarrow T(\vec{0})_m$ $\rightarrow T(\vec{0})_n = T(\vec{0})_m$ ✓

dus afbeelding T is lineair

(15) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



$T(\vec{e}_1) \xrightarrow{\text{projectie } x_2 = x_1} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$T(\vec{e}_2) \xrightarrow{\text{projectie } x_2 = x_1} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$S(\vec{e}_1) \xrightarrow{\text{spiegeling } x_2 = -x_1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$S(\vec{e}_2) \xrightarrow{\text{spiegeling } x_2 = x_1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow T \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ en $S \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Dus $ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$(ST) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1/2 \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = -1/2 (x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dus de beeldruimte $= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$ lijn $x_1 = x_2$, oftewel

(ST) Span $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

16

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$A \left[T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2) \quad T(\vec{e}_3) \right]$

$A \left[T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right]$

$A \left[\begin{matrix}3\\4\\1\end{matrix} \quad \left(T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) \quad \left(T\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) \right]$

$A \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

Dus, standaardmatrix $= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

17 a. $\begin{bmatrix}0\\3\\2\\-1\end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\-3\\-3\\-3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

deze nulvector is dus $\in NUL(T)$

b) $R(T)$ = Range van T

1) ga naar echelon vorm

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} - \\ \\ - \\ \\ \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3 \\ \\ -\frac{1}{3} \\ \\ \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & -4 & -11 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \frac{1}{3} \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$ Dus kolommen 1 en 2 spannen $R(T)$ op, dus $R(T) =$ Span $\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix} \right\}$

17 c.

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\\1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-3\\-3\\-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\0\\-2\\6\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\cdot T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\cdot\left(T\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \tfrac{1}{2}T\begin{pmatrix}4\\-2\\0\\-2\\6\end{pmatrix}$$, dus

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} - T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&-2&-1\\1&2&-3&0\\0&1&-2&-1\\2&1&0&3\end{bmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$$

, dus representatiematrix van T is $\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&-2&-1\\1&2&-3&0\\0&1&-2&-1\\2&1&0&3\end{bmatrix}$

18 a.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -8 & -2 & -9 & 0 \\ 6 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \downarrow 3/4 \quad \downarrow 1/2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -8 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & 2\tfrac{1}{2} & 1\tfrac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & -\tfrac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \downarrow 2/5 \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{-8} & -2 & -9 & 0 \\ 0 & \boxed{2\tfrac{1}{2}} & 1\tfrac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_3 is vrij, dus druk x_1, x_2 en x_3 uit in x_3

$2\tfrac{1}{2}\,x_2 = -1\tfrac{1}{4}\,x_2 \rightarrow x_2 = -\tfrac{1}{2}\,x_3$

$-8x_1 - 2x_2 - 9x_3 = 0 \rightarrow -8x_1 = 2x_2 + 9x_3$

$-8x_1 = -x_4 + 9x_3$

$x_1 = -1\,x_3$

$x_3 = x_3$

, dus $x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -\tfrac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$, dus NUL(T) is Span $\left\{\begin{bmatrix} \boxed{-1} \\ -\tfrac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

, dus basis NUL(A) is $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ -\tfrac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

b. $COL(T) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$

, dus $\left[\begin{array}{ccc|c} -8 & -2 & -9 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & p \end{array}\right] \downarrow 3/4 \quad \downarrow 1/2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -8 & -2 & -9 & 2 \\ 0 & 2\tfrac{1}{2} & 1\tfrac{1}{4} & 2\tfrac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\tfrac{1}{2} & p+1 \end{array}\right] \downarrow 2/5 \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -8 & -2 & -9 & 2 \\ 0 & 2\tfrac{1}{2} & 1\tfrac{1}{4} & 2\tfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & p+2 \end{array}\right]$$

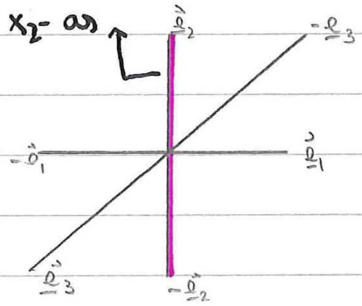
, mag niet strijdig zijn. dus $p+2=0$

$p = -2$

dus voor $p = -2$ is $\underline{w} \in COL(T)$

c $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



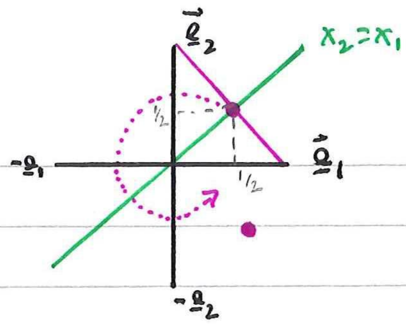
$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{e}_1 \xrightarrow{\pi \text{ rad over } x_2\text{-as}} -\vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \xrightarrow{\pi \text{ rad over } x_2\text{-as}} \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \xrightarrow{\pi \text{ rad over } x_2\text{-as}} -\vec{e}_3 \end{array}\right\} \text{representatie matrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{19}$ a. $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$\vec{e}_1 \xrightarrow{\text{projectie } x_2 = x_1} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rotatie } 3/4\pi} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_1 \xrightarrow{\text{projectie } x_2 = x_1} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{rotatie } 3/4\pi} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

repr. matrix $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$, nulruimte bepalen

$\left[\begin{array}{cc|c} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right] \downarrow \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1/2} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ x_2 is vrij, dus x_1 en x_2 in x_2 uitdrukken

$1/2\, x_1 = -1/2\, x_2$

$x_1 = -x_2$, dus nulruimte is Span $\left\{ \begin{bmatrix} \boxed{-1} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$x_2 = x_2$

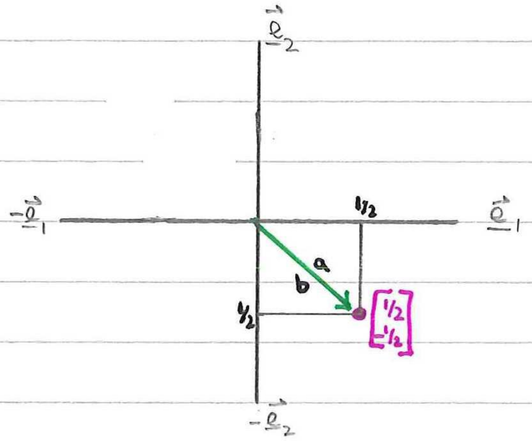
1 pivot dus basis nulruimte is $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

b. range is beeldruimte van matrix $\rightarrow$ gevormd door onafhankelijke kolommen.

$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \downarrow \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1/2} & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ pivot zit in eerste kolom, dus

beeldruimte is Span $(\vec{e}_1)$, dus basis Span $(\vec{e}_1)$ is $\vec{e}_1$

19 c. representatie matrix is $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$



standaard matrix geeft de vectoren weer die de representatie matrix vormen.

, dus $a^2 = {1/2}^2 + -{1/2}^2$

$a^2 = 0,5$

$a = \sqrt{1/2} = 1/2\sqrt{2} = -1/2\sqrt{2}$

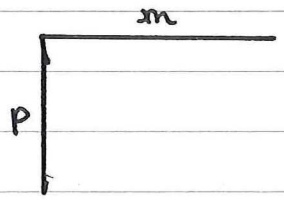
, dus vector a $= \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

$b^2 = 0,5$, $b = -1/2\sqrt{2}$, dus vector $b = \begin{bmatrix} -1/2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

standaard matrix is $\begin{bmatrix} -1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

20

$$\left.\begin{array}{l} F = M \times n \\ G = n \times p \end{array}\right\} \quad FG = M \times p$$



$FG = 0$

klopt niet want

$$\overset{F}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{G}{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

F en G zijn allebei geen 0

2.1 matrix inverteerbaar als: - vierkant
- elke kolom een pivot

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & \beta^2+1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \downarrow -\tfrac{1}{2} \downarrow -\tfrac{1}{2} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & \beta^2+1 \\ 0 & 4\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2}\beta^2+2\tfrac{1}{2} \\ 0 & -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2}\beta^2+1\tfrac{1}{2} \end{bmatrix} \downarrow \tfrac{1}{9} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -1 & \beta^2+1 \\ 0 & \boxed{4\tfrac{1}{2}} & -\tfrac{1}{2}\beta^2+2\tfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{-\tfrac{5}{9}\beta^2+1\tfrac{7}{9}} \end{bmatrix}$$

elke kolom moet een pivot hebben, dus $-\tfrac{5}{9}\beta^2 + 1\tfrac{7}{9} \neq 0$

$$-\tfrac{5}{9}\beta^2 \neq -1\tfrac{7}{9}$$
$$\beta^2 \neq 3.2$$

, dus $\beta = \sqrt{3\tfrac{1}{5}} \vee \beta = -\sqrt{3\tfrac{1}{5}}$ is A inverteerbaar

2.2 matrix inverteerbaar als: - vierkant
- elke kolom een pivot

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ -2 & -2\alpha & -3 \\ 4 & 5\alpha & 9+5\alpha \end{bmatrix} \downarrow \downarrow -2 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ 0 & -\alpha & -2 \\ 0 & 3\alpha & 7+5\alpha \end{bmatrix} \downarrow 3 \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ 0 & -\alpha & -2 \\ 0 & 0 & 1+5\alpha \end{bmatrix}$$

elke kolom een pivot, dus $1+5\alpha \neq 0$
$\wedge -\alpha \neq 0$

$$5\alpha \neq -1 \quad \wedge \quad -\alpha \neq 0$$
$$\alpha \neq -\tfrac{1}{5} \quad \wedge \quad \alpha \neq 0$$

Dus voor $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -\tfrac{1}{5}$ is matrix inverteerbaar

23 $(AB^T)^{-1} = (B^T)^{-1} \cdot A^{-1} = (B^{-1})^T \cdot A^{-1}$

24 a. een matrix 2×2 is inverteerbaar als $ad - bc \neq 0$

neem $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 0 \\ 0 & \boxed{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ niet inverteerbaar, dus stelling is onjuist

b. 1. $\vec{0} \in H$

$C \cdot 0 = -2 \cdot 0 = 0$, dus klopt

2. bestand tegen optellen en aftrekken

$T(u) = -2 \cdot u$

$T(v) = -2 \cdot v$

$\left.\begin{array}{l} T(u) + T(v) = -2u - 2v \\ T(u+v) = -2 \cdot (u+v) = -2u - 2v \end{array}\right\}$ voldoet

3. bestand tegen scalair vermenigvuldigen

$\left.\begin{array}{l} T(-1u) = 2u \\ -1T(u) = 2u \end{array}\right\}$ voldoet.

(25) $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix}$ en $y = \begin{bmatrix} 3 \\ -1/10 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$V = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$

V moet een orthogonale basis zijn, dus ① basis ?

② orthogonaliteit ?

① $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 16 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 2 pivots, dus $\text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$

② orthogonaliteit

$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 8$, dus basis is niet orthogonaal

↳ dus Gram - Schmidt ③

③ $\vec{x}_1 = v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\vec{x}_2 = \vec{V}_2 - \text{Projec}_{x_1}(\vec{V}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \left(\dfrac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}} \right) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \dfrac{8}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

dus orthogonale basis zijn $\text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1\frac{1}{3} \end{bmatrix}\right\} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

projectie: $\hat{y} = \dfrac{y \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \cdot v_1 + \dfrac{y \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} \cdot v_2$

$\hat{y} = \left(\dfrac{\begin{bmatrix} 3 \\ -1/10 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}} \right) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \left(\dfrac{\begin{bmatrix} 3 \\ -1/10 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1\frac{1}{3} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1\frac{1}{3} \end{bmatrix}} \right) \cdot \begin{bmatrix} 2\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \dfrac{2}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{1} \begin{bmatrix} 2\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$\hat{y} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

(26) $\underline{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$, $\underline{u}_3 = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$ en $\underline{y} = \begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$

$\vec{y} = \vec{v} + \vec{w}$

$\vec{y} \notin \text{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$

$\vec{v} \in \text{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$

$\vec{w} \in \text{Span}\{u_1, u_2, u_3\}^\perp$

te bewijzen: is Span $\{u_1, u_2, u_3\}$, basis en orthogonaal

$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\0&1&1\\-1&1&-1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}\boxed{1}&1&0\\0&\boxed{-1}&-1\\0&0&\boxed{-3}\\0&0&0\end{bmatrix} \rightarrow$ dus basis

ja!

↳ ja! zie hint

dus $\vec{v} = \text{Proj}_{u_1,u_2,u_3}(\vec{y}) \rightarrow \vec{v} = \left(\frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_1}{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}\right)\vec{u}_1 + \left(\frac{\vec{y}\cdot\vec{u}_2}{\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}\right)\vec{u}_2 + \left(\frac{\vec{y}\cdot u_3}{u_3\cdot u_3}\right)\vec{u}_3$

$$\vec{v} = \left(\frac{\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}}\right)\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix} + \left(\frac{\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}}\right)\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix} + \left(\frac{\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}}\right)\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = 1/3\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix} + 14/3\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix} + -5/3\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix}1/3\\1/3\\0\\-1/3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}14/3\\0\\14/3\\14/3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\5/3\\-5/3\\5/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15/3\\6/3\\9/3\\18/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\2\\3\\6\end{bmatrix}$$

$$\vec{w} = \vec{y} - \vec{v} = \begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5\\2\\3\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\2\\2\\0\end{bmatrix}$$

Dus $\vec{y} = \begin{bmatrix}5\\2\\3\\6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\2\\2\\0\end{bmatrix}$