Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
woensdag 29 januari 2014, 14:00 - 17:00 uur

---

1. Dit is voorbeeld 3 van § 3.4.

   (a) Als $y(t) = \frac{1}{t}$, dan volgt: $y'(t) = -\frac{1}{t^2}$ en $y''(t) = \frac{2}{t^3}$. Invullen geeft dan:

   $$2t^2 \cdot \frac{2}{t^3} + 3t \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{t} = \frac{4}{t} - \frac{3}{t} - \frac{1}{t} = 0.$$

   (b) Stel nu $y(t) = \frac{u(t)}{t}$, dan volgt:

   $$y'(t) = \frac{u'(t)}{t} - \frac{u(t)}{t^2} \quad \text{en} \quad y''(t) = \frac{u''(t)}{t} - \frac{2u'(t)}{t^2} + \frac{2u(t)}{t^3}.$$

   Invullen:

   $$2tu''(t) - 4u'(t) + \frac{4u(t)}{t} + 3u'(t) - \frac{3u(t)}{t} - \frac{u(t)}{t} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2tu''(t) - u'(t) = 0.$$

   Stel nu $v(t) = u'(t)$, dan volgt (methode van ordeverlaging):

   $$2tv'(t) = v(t) \quad \text{oftewel} \quad v'(t) = \frac{1}{2t}v(t). \quad \text{Dus:} \quad v(t) = e^{\frac{1}{2}\ln t + K} = Ct^{\frac{1}{2}} = C\sqrt{t}.$$

   Dus:

   $$u'(t) = C\sqrt{t} \quad \Longrightarrow \quad u(t) = c_1 t\sqrt{t} + c_2.$$

   Ten slotte volgt dan dat:

   $$y(t) = c_1\sqrt{t} + \frac{c_2}{t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Dit is opgave 4 van § 4.3.

   De karakteristieke vergelijking is: $r^3 - r = 0$ oftewel $r(r^2-1) = 0$. Dus: $r = 0$ of $r = \pm 1$. De algemene oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking $y'''(t) - y'(t) = 0$ is dus $y_h(t) = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t}$. Voor een particuliere oplossing kunnen we de methode van onbepaalde coëfficiënten toepassen. Stel daarom: $y_p(t) = A\cos t + B\sin t$. Dan volgt: $y'(t) = -A\sin t + B\cos t$, $y''(t) = -A\cos t - B\sin t$ en $y'''(t) = A\sin t - B\cos t$. Invullen geeft dan:

   $$y_p'''(t) - y_p'(t) = 2\cos t: \quad 2A\sin t - 2B\cos t = 2\cos t.$$

   Dus: $A = 0$ en $B = -1$. Een particuliere oplossing is dus: $y_p(t) = -\sin t$. De algemene oplossing is dus:

   $$y(t) = -\sin t + c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

3. Dit is opgave 11 van § 6.5.

   Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\,[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s}.$$

   Nu is: $y(0) = 0$ en $y'(0) = 0$. Dus volgt:

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s}.$$

   Hieruit volgt:

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+2s+2)} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}.$$

   Met behulp van breuksplitsing vinden we

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s^2+1)(s^2+2s+2)} &= \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C(s+1)+D}{(s+1)^2+1} \\ &= \frac{(As+B)(s^2+2s+2) + (C(s+1)+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}. \end{aligned}$$

   En dus:

$$s = (A+C)s^3 + (2A+B+C+D)s^2 + (2A+2B+C)s + 2B+C+D.$$

   Hieruit volgt: $A = \frac{1}{5}$, $B = \frac{2}{5}$, $C = -\frac{1}{5}$ en $D = -\frac{3}{5}$. Dus:

$$Y(s) = \frac{1}{5}\frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{5}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{5}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{3}{5}\frac{1}{(s+1)^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+1}.$$

   Terugtransformeren geeft ten slotte:

$$y(t) = \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t - \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{3}{5}e^{-t}\sin t + u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi).$$

4. Vergelijk met opgave 27 van § 6.6.

   Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

$$sY(s) - y(0) - Y(s)\cdot\frac{1}{s^2} = -\frac{1}{s}.$$

   Met $y(0) = 1$ volgt dan:

$$\left(s - \frac{1}{s^2}\right)Y(s) = 1 - \frac{1}{s} = \frac{s-1}{s} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{s^3-1}{s^2}\right)Y(s) = \frac{s-1}{s}.$$

   Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s(s-1)}{s^3-1} = \frac{s(s-1)}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{s}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

   Terugtransformeren levert dan:

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{1}{2}t\sqrt{3}) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin(\frac{1}{2}t\sqrt{3}).$$

5. Zie § 7.9. Vergelijk met opgave 3.

De karakteristieke vergelijking van A is:

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} 2-r & 1 \\ 5 & -2-r \end{vmatrix} = r^2 - 4 - 5 = r^2 - 9 \quad \Longrightarrow \quad r = \pm 3.$$

We bepalen nu de eigenvectoren van A bij de eigenwaarde $r = \pm 3$:

$$r_1 = 3: \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$r_2 = -3: \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dus: $\underline{x}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-3t}$.

Voor een particuliere oplossing proberen we nu

$$\underline{x}_p(t) = \underline{u} \cos t + \underline{v} \sin t.$$

Invullen geeft dan:

$$-\underline{u} \sin t + \underline{v} \cos t = A\underline{u} \cos t + A\underline{v} \sin t + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \sin t.$$

Hieruit volgt:

$$A\underline{u} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{v} \quad \text{en} \quad A\underline{v} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -\underline{u}.$$

Nu volgt (vul de eerste vergelijking in de tweede in):

$$A^2\underline{u} + A \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -\underline{u}$$

oftewel

$$\left(A^2 + I\right) \underline{u} = A \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 0 \\ 25 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Nu is

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

dus:

$$\left(A^2 + I\right) \underline{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad 10\underline{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dan volgt:

$$\underline{v} = A\underline{u} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2 - 5 \\ 5 - 4 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dus: $\underline{x}_p(t) = \underline{u} \cos t + \underline{v} \sin t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t$. De algemene oplossing is dus: $\underline{x}(t) = \underline{x}_p(t) + \underline{x}_h(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-3t}$.

6. Zie § 9.2 en § 9.3. Vergelijk met opgave 17 van § 9.3.

Voor de kritieke punten moet gelden

$$\begin{cases} 9 - y^2 = 0 & \Longrightarrow \quad y = 3 \text{ of } y = -3 \\ \\ (1+x)(y-x) = 0 & \Longrightarrow \quad x = -1 \text{ of } x = y. \end{cases}$$

De vier kritieke punten zijn dus: $(-3,-3)$, $(-1,-3)$, $(-1,3)$ en $(3,3)$.

Voor elk van deze punten beschouwen we nu het lineaire stelsel

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0) & F_y(x_0,y_0) \\ G_x(x_0,y_0) & G_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

waarbij

$$\begin{pmatrix} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ y-2x-1 & 1+x \end{pmatrix}.$$

Voor $(x_0,y_0) = (-3,-3)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden $-1 \pm \sqrt{13}$.

Voor $(x_0,y_0) = (-1,-3)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden $\pm i\sqrt{12} = \pm 2i\sqrt{3}$.

Voor $(x_0,y_0) = (-1,3)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden $\pm i\sqrt{24} = \pm 2i\sqrt{6}$.

Voor $(x_0,y_0) = (3,3)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden $2 \pm \sqrt{28} = 2 \pm 2\sqrt{7}$.

Dit betekent dat $(-3,-3)$ en $(3,3)$ instabiele zadelpunten zijn (zowel positieve als negatieve eigenwaarden). Verder zijn $(-1,-3)$ en $(-1,3)$ centerpunten of spiraalpunten, waarbij de stabiliteit onbekend is.

7. Zie § 10.7.

Stel $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$, dan volgt:

$$4X''(x)T(t) = X(x)T''(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante)}.$$

Hieruit volgt: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $T''(t) - 4\sigma T(t) = 0$.

Uit de randvoorwaarden volgt: $X(0) = 0$ en $X(2) = 0$. Dus:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < 2 \\ X(0) = 0, \quad X(2) = 0. \end{cases}$$

(a) Voor $\sigma = 0$ vinden we: $X''(x) = 0$. Dus: $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(2) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

(b) Stel $\sigma = \mu^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2 \sinh(2\mu) = 0$. Dus: $b_2 = 0$, want $\mu \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(c) Stel $\sigma = -\mu^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2 \sin(2\mu) = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin(2\mu) = 0 \Longrightarrow 2\mu = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden:

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we dan $T''(t) + n^2\pi^2 T(t) = 0$. Uit de beginvoorwaarde $u_t(x,0) = 0$ volgt bovendien dat $T'(0) = 0$. Dus: $T_n(t) = \cos(n\pi t)$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Hieruit volgt dat

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \cos(n\pi t).$$

Uit de eerste beginvoorwaarde volgt dan:

$$u(x,0) = 2\sin(2\pi x) - 4\sin(4\pi x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = 2\sin(2\pi x) - 4\sin(4\pi x).$$

Hieruit volgt dat $c_4 = 2$, $c_8 = -4$ en $c_n = 0$ voor alle andere waarden van n.
De oplossing is dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \cos(n\pi t) = 2\sin(2\pi x)\cos(4\pi t) - 4\sin(4\pi x)\cos(8\pi t).$$