

Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
woensdag 29 januari 2014, 14:00 - 17:00 uur
Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden

1. Beschouw de differentiaalvergelijking $2t^2y''(t) + 3ty'(t) - y(t) = 0$ voor $t > 0$.

(1 pt) (a) Ga na dat $y(t) = \frac{1}{t}$ een oplossing is.

(3 pt) (b) Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking.

(4 pt) 2. Bepaal de algemene oplossing van de derde orde differentiaalvergelijking

$$y'''(t) - y'(t) = 2 \cos t.$$

(4 pt) 3. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = \cos t + \delta(t - \pi) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

(4 pt) 4. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'(t) - \int_0^t (t - \tau)y(\tau) d\tau = -1, \quad y(0) = 1.$$

(8 pt) 5. Bepaal de algemene oplossing van het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} -5 \cos t \\ 5 \sin t \end{pmatrix}.$$

(4 pt) 6. Beschouw het niet-lineaire autonome stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = 9 - y^2 \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = (1 + x)(y - x).$$

Bepaal alle (4) kritieke punten van dit stelsel en classificeer deze (type en stabiliteit). Welke conclusie kan men hieruit trekken omtrent gedrag en stabiliteit van de oplossingen?

(8 pt) 7. Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen een oplossing van het beginrandwaardeprobleem gedefinieerd door

$$\begin{cases} 4u_{xx} = u_{tt}, & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 2 \sin(2\pi x) - 4 \sin(4\pi x), \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$