Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
woensdag 30 januari 2013, 14:00 - 17:00 uur

---

1. Vergelijk met opgave 10 van § 3.6.

   De karakteristieke vergelijking is: $r^2 + 6r + 9 = 0$ oftewel $(r+3)^2 = 0$. Dus: $r = -3$ (tweemaal). De algemene oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking

$$y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0$$

   is dus

$$y_h(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}.$$

   Voor een particuliere oplossing kunnen we de methode van variatie van de constanten toepassen. Stel daarom:

$$y(t) = u_1(t)e^{-3t} + u_2(t)te^{-3t}.$$

   Dan volgt:

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t)e^{-3t} + u_2'(t)te^{-3t}}_{=0} - 3u_1(t)e^{-3t} + u_2(t)(1-3t)e^{-3t}$$

   en

$$y''(t) = -3u_1'(t)e^{-3t} + u_2'(t)(1-3t)e^{-3t} + 9u_1(t)e^{-3t} + u_2(t)(9t-6)e^{-3t}.$$

   Invullen geeft dan:

$$-3u_1'(t)e^{-3t} + u_2'(t)(1-3t)e^{-3t} = \frac{e^{-3t}}{1+t^2}.$$

   Dus:

$$\begin{cases} u_1'(t)e^{-3t} + u_2'(t)te^{-3t} = 0 \\ -3u_1'(t)e^{-3t} + u_2'(t)(1-3t)e^{-3t} = \dfrac{e^{-3t}}{1+t^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_1'(t) + u_2'(t)t = 0 \\ -3u_1'(t) + u_2'(t)(1-3t) = \dfrac{1}{1+t^2}. \end{cases}$$

   Hieruit volgt:

$$u_2'(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{en} \quad u_1'(t) = -tu_2'(t) = -\frac{t}{1+t^2}.$$

   Dus:

$$u_2(t) = \arctan t + c_2 \quad \text{en} \quad u_1(t) = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + c_1.$$

   De algemene oplossing is dus:

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{-3t}\ln(1+t^2) + te^{-3t}\arctan t + c_1e^{-3t} + c_2te^{-3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Vergelijk met opgave 11 van § 6.5.

   Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\left[sY(s) - y(0)\right] + 2Y(s) = 5\frac{s}{s^2+1} + 3e^{-\pi s}.$$

   Nu is: $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$. Dus volgt:

$$(s^2+2s+2)Y(s) = s + 2 + 5\frac{s}{s^2+1} + 3e^{-\pi s} = \frac{s^3+2s^2+6s+2}{s^2+1} + 3e^{-\pi s}.$$

   Hieruit volgt:

$$Y(s) = \frac{s^3+2s^2+6s+2}{(s^2+1)(s^2+2s+2)} + 3\frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}.$$

   Met behulp van breuksplitsing vinden we

$$\begin{aligned}\frac{s^3+2s^2+6s+2}{(s^2+1)(s^2+2s+2)} &= \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C(s+1)+D}{(s+1)^2+1}\\ &= \frac{(As+B)(s^2+2s+2)+(C(s+1)+D)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}.\end{aligned}$$

   En dus:

$$s^3+2s^2+6s+2 = (A+C)s^3 + (2A+B+C+D)s^2 + (2A+2B+C)s + 2B + C + D.$$

   Hieruit volgt: $A = 1$, $B = 2$, $C = 0$ en $D = -2$. Dus:

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1} - \frac{2}{(s+1)^2+1} + 3\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2+1}.$$

   Terugtransformeren geeft ten slotte:

$$y(t) = \cos t + 2\sin t - 2e^{-t}\sin t + 3u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi).$$

3. Zie § 7.8. Vergelijk met opgave 18.

   De karakteristieke vergelijking van A is:

$$\begin{aligned}|A - rI| = \begin{vmatrix} -1-r & 0 & 0\\ -1 & -2-r & 1\\ -1 & -1 & -r\end{vmatrix} &= (-1-r)\begin{vmatrix} -2-r & 1\\ -1 & -r\end{vmatrix}\\ &= -(1+r)(r^2+2r+1) = -(r+1)^3.\end{aligned}$$

   De matrix A heeft dus een drievoudige eigenwaarde -1 (gegeven).

   We bepalen nu de eigenvectoren van A bij de eigenwaarde $r = -1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow E_{-1} = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}.$$

Voor een gegeneraliseerde eigenvector $\underline{v}$ moet dan gelden: $(A+I)\underline{v} = \underline{u}$, waarbij $\underline{u}$ een geschikt gekozen eigenvector van A is. We moeten daarom α en β zo kiezen dat het volgende stelsel oplosbaar is:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ -1 & -1 & 1 & \beta \\ -1 & -1 & 1 & \alpha+\beta \end{array}\right).$$

Hieruit volgt dat we $\alpha = 0$ moeten kiezen. Als we nu $\beta = 1$ kiezen, dan volgt:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \left(\begin{array}{rrr|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(bijv.)}.$$

De algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen is dus

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t+1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

4. Zie § 9.2 en § 9.3. Dit is opgave 18 van § 9.3.

   Voor de kritieke punten moet gelden

$$\begin{cases} (1-y)(2x-y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 1 \text{ of } y = 2x \\ \\ (2+x)(x-2y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -2 \text{ of } x = 2y. \end{cases}$$

   De vier kritieke punten zijn dus: $(0,0)$, $(-2,-4)$, $(-2,1)$ en $(2,1)$.

   Voor elk van deze punten beschouwen we nu het lineaire stelsel

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0) & F_y(x_0,y_0) \\ G_x(x_0,y_0) & G_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

   waarbij

$$\begin{pmatrix} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y+2 & -2x+2y-1 \\ 2x-2y+2 & -2x-4 \end{pmatrix}.$$

   Voor $(x_0,y_0) = (0,0)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden $-1 \pm \sqrt{7}$.

   Voor $(x_0,y_0) = (-2,-4)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden $5 \pm i\sqrt{5}$.

   Voor $(x_0,y_0) = (-2,1)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden $\pm i\sqrt{20} = \pm 2i\sqrt{5}$.

   Voor $(x_0,y_0) = (2,1)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden -6 en -2.

   Dit betekent dat $(0,0)$ een instabiel zadelpunt is (zowel positieve als negatieve eigenwaarden). Verder is $(-2,-4)$ een instabiel spiraalpunt en $(2,1)$ een asymptotisch stabiele knoop (twee negatieve eigenwaarden). Ten slotte is $(-2,1)$ een centerpunt of een spiraalpunt, waarbij de stabiliteit onbekend is.

5. Zie § 10.7.

Stel $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$, dan volgt:

$$16X''(x)T(t) = X(x)T''(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{16} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Hieruit volgt: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $T''(t) - 16\sigma T(t) = 0$.

Uit de randvoorwaarden volgt: $X(0) = 0$ en $X(2) = 0$. Dus:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < 2 \\ X(0) = 0, \quad X(2) = 0. \end{cases}$$

(a) Voor $\sigma = 0$ vinden we: $X''(x) = 0$. Dus: $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(2) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

(b) Stel $\sigma = \mu^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2 \sinh(2\mu) = 0$. Dus: $b_2 = 0$, want $\mu \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(c) Stel $\sigma = -\mu^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2 \sin(2\mu) = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin(2\mu) = 0 \Longrightarrow 2\mu = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden:

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we dan $T''(t) + 4n^2\pi^2 T(t) = 0$. Uit de beginvoorwaarde $u_t(x,0) = 0$ volgt bovendien dat $T'(0) = 0$. Dus: $T_n(t) = \cos(2n\pi t)$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Hieruit volgt dat

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \cos(2n\pi t).$$

Uit de eerste beginvoorwaarde volgt dan:

$$u(x,0) = 2\sin(2\pi x) - 5\sin(3\pi x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = 2\sin(2\pi x) - 5\sin(3\pi x).$$

Hieruit volgt dat $c_4 = 2$, $c_6 = -5$ en $c_n = 0$ voor alle andere waarden van n.

De oplossing is dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \cos(2n\pi t) = 2\sin(2\pi x)\cos(8\pi t) - 5\sin(3\pi x)\cos(12\pi t).$$