Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
dinsdag 25 januari 2011, 14:00 - 17:00 uur

---

1. Dit is opgave 25 van § 3.4.

   (a) Uit $y_1(t) = t^{-1}$ volgt: $y_1'(t) = -t^{-2}$ en $y_1''(t) = 2t^{-3}$. Invullen geeft dan:

   $$t^2 y_1''(t) + 3t y_1'(t) + y_1(t) = 2t^{-1} - 3t^{-1} + t^{-1} = 0.$$

   Dus: $y_1(t) = t^{-1}$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking.

   (b) Stel nu: $y(t) = u(t)\,t^{-1}$. Dan volgt:

   $$y'(t) = u'(t)t^{-1} - u(t)t^{-2} \quad \text{en} \quad y''(t) = u''(t)t^{-1} - 2u'(t)t^{-2} + 2u(t)t^{-3}.$$

   Invullen geeft dan:

   $$tu''(t) - 2u'(t) + 3u'(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad tu''(t) + u'(t) = 0.$$

   Stel nu $v(t) = u'(t)$, dan volgt: $tv'(t) + v(t) = 0$. Dit is een eerste orde separabele differentiaalvergelijking:

   $$t\frac{dv}{dt} = -v \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dt}{t}.$$

   Hieruit volgt dat $v(t) = c_1 t^{-1}$ en dus: $u(t) = c_1 \ln t + c_2$. De algemene oplossing is dus: $y(t) = u(t)t^{-1} = c_1 t^{-1} \ln t + c_2 t^{-1}$.

2. Vergelijk met opgave 10 van § 4.3.

   De karakteristieke vergelijking is: $r^3 - 3r^2 + 2r = 0$ oftewel $r(r-1)(r-2) = 0$. De algemene oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking is dus $y_h(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t}$. Voor een particuliere oplossing proberen we dan: $y_p(t) = At^2 + Bt + Cte^t$. Dan volgt: $y_p'(t) = 2At + B + C(t+1)e^t$, $y_p''(t) = 2A + C(t+2)e^t$ en $y_p'''(t) = C(t+3)e^t$. Invullen geeft dan:

   $$4At + 2B - 6A + C(t + 3 - 3t - 6 + 2t + 2)e^t = 4t + e^t.$$

   Hieruit volgt: $A = 1$, $B = 3$ en $C = -1$. Dus: $y_p(t) = t^2 + 3t - te^t$. De algemene oplossing is dus:

   $$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = t^2 + 3t - te^t + c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

3. Vergelijk met opgave 7 en 8 van § 6.1.

   Er geldt:

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}\{\cosh t\}(s) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{s+1+s-1}{(s-1)(s+1)} = \frac{s}{s^2-1}. \end{aligned}$$

4. Vergelijk met opgave 5 en opgave 11 van § 6.5.

   Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\left[sY(s) - y(0)\right] + Y(s) = \frac{2}{s^2+1} + 5\,e^{-\pi s}.$$

   Nu is: $y(0) = -1$ en $y'(0) = 0$. Dus volgt:

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = -s - 2 + \frac{2}{s^2+1} + 5\,e^{-\pi s} = \frac{-s^3 - 2s^2 - s}{s^2+1} + 5\,e^{-\pi s}.$$

   Hieruit volgt:

$$Y(s) = \frac{-s^3 - 2s^2 - s}{(s+1)^2(s^2+1)} + 5\,\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2}.$$

   Merk op dat (dan is breuksplitsing niet nodig)

$$\frac{-s^3 - 2s^2 - s}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{-s(s^2+2s+1)}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{-s(s+1)^2}{(s+1)^2(s^2+1)} = -\frac{s}{s^2+1}.$$

   Met behulp van breuksplitsing vinden we

$$\begin{aligned} \frac{-s^3 - 2s^2 - s}{(s+1)^2(s^2+1)} &= \frac{A(s+1)+B}{(s+1)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \\ &= \frac{A(s+1)(s^2+1) + B(s^2+1) + Cs(s+1)^2 + D(s+1)^2}{(s+1)^2(s^2+1)}. \end{aligned}$$

   En dus:

$$-s^3 - 2s^2 - s = (A+C)s^3 + (A+B+2C+D)s^2 + (A+C+2D)s + A + B + D.$$

   Hieruit volgt: $A = 0$, $B = 0$, $C = -1$ en $D = 0$. Dus:

$$Y(s) = -\frac{s}{s^2+1} + 5\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2}.$$

   Terugtransformeren geeft ten slotte:

$$y(t) = -\cos t + 5u_\pi(t)(t-\pi)e^{-(t-\pi)}.$$

5. (a) Dit is opgave 5 van § 7.7.

   We bepalen eerst de eigenwaarden van A:

$$0 = |A - rI| = \begin{vmatrix} 2-r & -1 \\ 3 & -2-r \end{vmatrix} = r^2 - 4 + 3 = r^2 - 1 = (r-1)(r+1).$$

De eigenwaarden zijn dus: $r = \pm 1$. Voor de eigenvectoren vinden we dan:

$$r_1 = 1: \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$r_2 = -1: \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Een fundamentaalmatrix van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ is dus (bijvoorbeeld)

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Dan volgt:

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Psi^{-1}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ten slotte volgt:

$$\begin{aligned} e^{At} = \Psi(t) \cdot \Psi^{-1}(0) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^t - e^{-t} & -e^t + e^{-t} \\ 3e^t - 3e^{-t} & -e^t + 3e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Dit is opgave 1 van § 7.9.
We zoeken een particuliere oplossing van de vorm $\underline{x}_p(t) = \underline{u}_1 te^t + \underline{u}_2 e^t + \underline{u}_3 t + \underline{u}_4$.
Invullen geeft dan:

$$\underline{u}_1(t+1)e^t + \underline{u}_2 e^t + \underline{u}_3 = A\underline{u}_1 te^t + A\underline{u}_2 e^t + A\underline{u}_3 t + A\underline{u}_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t.$$

Hieruit volgt:

$$A\underline{u}_1 = \underline{u}_1, \quad A\underline{u}_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{u}_2 + \underline{u}_1, \quad A\underline{u}_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{o} \quad \text{en} \quad A\underline{u}_4 = \underline{u}_3.$$

Dus: $\underline{u}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $(A - I)\,\underline{u}_2 = \underline{u}_1 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \alpha - 1 \\ 3 & -3 & \alpha \end{array} \right)$.

Dit is alleen oplosbaar als $3(\alpha - 1) = \alpha$ oftewel $\alpha = \dfrac{3}{2}$. Dan volgt:

$$\underline{u}_1 = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(bijvoorbeeld)}.$$

Verder volgt:

$$A\underline{u}_3 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

en

$$A\underline{u}_4 = \underline{u}_3: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Een particuliere oplossing is dus

$$\underline{x}_p(t) = \underline{u}_1 te^t + \underline{u}_2 e^t + \underline{u}_3 t + \underline{u}_4 = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing is dan:

$$\underline{x}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3t + 1 \\ 3t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} t \\ 2t - 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

6. Vergelijk met opgave 7 van § 10.5.

Stel $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$, dan volgt:

$$4X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Hieruit volgt: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $T'(t) - 4\sigma T(t) = 0$.

Uit de randvoorwaarden volgt: $X(0) = 0$ en $X(2) = 0$. Dus:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < 2 \\ X(0) = 0, \quad X(2) = 0. \end{cases}$$

(a) Voor $\sigma = 0$ vinden we: $X''(x) = 0$. Dus: $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(2) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

(b) Stel $\sigma = \mu^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2 \sinh(2\mu) = 0$. Dus: $b_2 = 0$, want $\mu \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(c) Stel $\sigma = -\mu^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2 \sin(2\mu) = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin(2\mu) = 0 \Longrightarrow 2\mu = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden:

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we dan $T_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Uit de beginvoorwaarde volgt:

$$\begin{aligned} & u(x,0) = 2\sin(2\pi x) + \sin(3\pi x) - 3\sin(5\pi x) \\ \Longleftrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = 2\sin(2\pi x) + \sin(3\pi x) - 3\sin(5\pi x). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $c_4 = 2$, $c_6 = 1$, $c_{10} = -3$ en $c_n = 0$ voor alle andere waarden van n. De oplossing is dus:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \\ &= 2e^{-16\pi^2 t} \sin(2\pi x) + e^{-36\pi^2 t} \sin(3\pi x) - 3e^{-100\pi^2 t} \sin(5\pi x). \end{aligned}$$