

Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
dinsdag 25 januari 2011, 14:00 - 17:00 uur

HET GEBRUIK VAN EEN REKENMACHINE IS TOEGESTAAN

1. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$t^2 y''(t) + 3ty'(t) + y(t) = 0, \quad t > 0.$$

(1 pt) (a) Toon aan dat $y_1(t) = t^{-1}$ een oplossing is.

(3 pt) (b) Bepaal de algemene oplossing met behulp van de methode van ordeverlaging.

(4 pt) 2. Bepaal de algemene oplossing van de derde orde differentiaalvergelijking

$$y'''(t) - 3y''(t) + 2y'(t) = 4t + e^t.$$

(2 pt) 3. Toon aan dat de Laplace getransformeerde van de functie $f(t) = \cosh t := \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ gelijk is aan $F(s) = \frac{s}{s^2 - 1}$.

(4 pt) 4. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2 \sin t + 5 \delta(t - \pi) \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

5. Beschouw het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}.$$

(3 pt) (a) Bepaal de matrix e^{At} .

(4 pt) (b) Bepaal de algemene oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$.

(6 pt) 6. Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen een oplossing van het beginrandwaardeprobleem gedefinieerd door

$$\begin{cases} 4u_{xx} = u_t, & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 2 \sin(2\pi x) + \sin(3\pi x) - 3 \sin(5\pi x), & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$