Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen wi2051WbMT
woensdag 1 februari 2012, 14:00 - 17:00 uur

---

1. Vergelijk met voorbeeld 3 en opgaven 26 en 29 van § 3.4.

   (a) Uit $y_1(t) = e^t$ volgt: $y_1'(t) = e^t$ en $y_1''(t) = e^t$. Invullen geeft dan:

   $$ty_1''(t) - (2t+1)y_1'(t) + (t+1)y_1(t) = (t - 2t - 1 + t + 1)\, e^t = 0.$$

   Dus: $y_1(t) = e^t$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking.

   (b) Stel nu: $y(t) = u(t)\, e^t$. Dan volgt:

   $$y'(t) = u'(t)e^t + u(t)e^t \quad \text{en} \quad y''(t) = u''(t)e^t + 2u'(t)e^t + u(t)e^t.$$

   Invullen geeft dan:

   $$tu''(t)e^t + 2tu'(t)e^t - (2t+1)u'(t)e^t = 0 \quad \Longrightarrow \quad tu''(t) - u'(t) = 0.$$

   Stel nu $v(t) = u'(t)$, dan volgt: $tv'(t) - v(t) = 0$. Dit is een eerste orde separabele differentiaalvergelijking:

   $$t\frac{dv}{dt} = v \quad \Longrightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{dt}{t} \quad \Longrightarrow \quad \ln|v(t)| = \ln|t| + C \quad \Longrightarrow \quad v(t) = \pm e^C t.$$

   Hieruit volgt dat $v(t) = c_1 t$ en dus: $u(t) = \frac{1}{2}c_1 t^2 + c_2$. De algemene oplossing is dus: $y(t) = u(t)e^t = \frac{1}{2}c_1 t^2 e^t + c_2 e^t$.

2. Vergelijk met opgave 6 en opgave 8 van § 6.5.

   Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

   $$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = e^{-\pi s}.$$

   Nu is: $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$. Dus volgt:

   $$(s^2+4)Y(s) = s + e^{-\pi s} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+4}.$$

   Terugtransformeren geeft ten slotte:

   $$y(t) = \cos 2t + \frac{1}{2}u_\pi(t)\sin 2(t-\pi).$$

3. Vergelijk met opgave 26 van § 6.6.

Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

$$sY(s) - y(0) = \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1} \cdot Y(s).$$

Nu is: $y(0) = 1$. Dus volgt: $\left(s - \dfrac{s}{s^2+1}\right) Y(s) = 1 + \dfrac{1}{s}$ oftewel

$$\frac{s^3}{s^2+1} Y(s) = \frac{s+1}{s} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{(s+1)(s^2+1)}{s^4} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^4}.$$

Terugtransformeren geeft ten slotte:

$$y(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3.$$

4. (a) Zie § 7.7. Vergelijk met opgave 5 van § 7.5.

We bepalen eerst de eigenwaarden van A:

$$0 = |A - rI| = \begin{vmatrix} -2-r & 1 \\ 1 & -2-r \end{vmatrix} = r^2 + 4r + 3 = (r+1)(r+3).$$

De eigenwaarden zijn dus: $r_1 = -1$ en $r_2 = -3$. Voor de eigenvectoren vinden we dan:

$$r_1 = -1: \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$r_2 = -3: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Een fundamentaalmatrix van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$ is dus (bijvoorbeeld)

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-3t} \\ e^{-t} & e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Dan volgt:

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Psi^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ten slotte volgt:

$$\begin{aligned} e^{At} = \Psi(t) \cdot \Psi^{-1}(0) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-3t} \\ e^{-t} & e^{-3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Dit is voorbeeld 1 t/m 3 van § 7.9. Methode van onbepaalde coëfficiënten:

We zoeken een particuliere oplossing van de vorm $\underline{x}_p(t) = \underline{u}_1 te^{-t} + \underline{u}_2 e^{-t} + \underline{u}_3 t + \underline{u}_4$.

Invullen geeft dan:

$$\underline{u}_1(-t+1)e^{-t} - \underline{u}_2 e^{-t} + \underline{u}_3 = A\underline{u}_1 te^{-t} + A\underline{u}_2 e^{-t} + A\underline{u}_3 t + A\underline{u}_4 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} t.$$

Hieruit volgt:

$$A\underline{u}_1 = -\underline{u}_1, \quad A\underline{u}_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{u}_1 - \underline{u}_2, \quad A\underline{u}_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{o} \quad \text{en} \quad A\underline{u}_4 = \underline{u}_3.$$

Dus: $\underline{u}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $(A+I)\,\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \alpha - 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$: $\left(\begin{array}{rr|c} -1 & 1 & \alpha - 2 \\ 1 & -1 & \alpha \end{array}\right)$. Dit is alleen oplosbaar als $\alpha - 2 = -\alpha$ oftewel $\alpha = 1$. Dan volgt:

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(bijvoorbeeld).}$$

Verder volgt:

$$A\underline{u}_3 = -\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}: \quad \left(\begin{array}{rr|c} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

en

$$A\underline{u}_4 = \underline{u}_3 : \quad \left(\begin{array}{rr|c} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{u}_4 = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Een particuliere oplossing is dus

$$\underline{x}_p(t) = \underline{u}_1 te^{-t} + \underline{u}_2 e^{-t} + \underline{u}_3 t + \underline{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing is dan:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3t-4 \\ 6t-5 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dit is de methode van onbepaalde coëfficiënten (§ 7.9, voorbeeld 2). Het kan ook via diagonaliseren (§ 7.9, voorbeeld 1) of variatie van de constante (§ 7.9, voorbeeld 3).

5. Zie § 9.2 en § 9.3. Vergelijk met opgave 5 en 10 van § 9.2 en opgave 5 van § 9.3.

Voor de kritieke punten moet gelden

$$\begin{cases} x(y-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \text{ of } y = 2 \\ \\ (x-2)y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2 \text{ of } y = 0. \end{cases}$$

De twee kritieke punten zijn dus: $(0,0)$ en $(2,2)$.

Voor elk van deze punten beschouwen we nu het lineaire stelsel

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0) & F_y(x_0,y_0) \\ G_x(x_0,y_0) & G_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

waarbij

$$\begin{pmatrix} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-2 & x \\ y & x-2 \end{pmatrix}.$$

Voor $(x_0, y_0) = (0,0)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ met eigenwaarde(n) $\lambda = -2$ $(2\times)$. Merk op dat zowel de algebraïsche als de meetkundige multipliciteit van de eigenwaarde gelijk is aan 2. De matrix is diagonaliseerbaar (het is immers een diagonaalmatrix). Dit betekent dat $(0,0)$ een asymptotisch stabiele zuivere knoop is van het lineaire stelsel. Voor het niet-lineaire stelsel is $(0,0)$ dan een asymptotisch stabiele knoop of een asymptotisch stabiel spiraalpunt.

Voor $(x_0, y_0) = (2,2)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 2 \text{ en } \lambda_2 = -2.$$

Dit betekent dat $(2,2)$ zowel voor het lineaire als het niet-lineaire stelsel een instabiel zadelpunt is (zowel een positieve als een negatieve eigenwaarde).

6. Zie § 10.8.

Stel $u(x,y) = X(x)Y(y) \neq 0$, dan volgt:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Hieruit volgt: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $Y''(y) + \sigma Y(y) = 0$.

Uit de homogene randvoorwaarden volgt: $X(0) = 0$, $X(2) = 0$ en $Y(0) = 0$. Dus:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < 2 \\ X(0) = 0, \quad X(2) = 0. \end{cases}$$

(a) Voor $\sigma = 0$ vinden we: $X''(x) = 0$. Dus: $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(2) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

(b) Stel $\sigma = \mu^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2 \sinh(2\mu) = 0$. Dus: $b_2 = 0$, want $\mu \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(c) Stel $\sigma = -\mu^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2 \sin(2\mu) = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin(2\mu) = 0 \Longrightarrow 2\mu = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden:

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $Y(y)$ vinden we dan: $Y''(y) - \dfrac{n^2\pi^2}{4} Y(y) = 0$ met $Y(0) = 0$. Hieruit volgt: $Y_n(y) = \sinh\left(\dfrac{n\pi y}{2}\right)$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{2}\right).$$

Uit de inhomogene randvoorwaarde volgt:

$$\begin{aligned} & u(x,4) = 2\sin(2\pi x) + \sin(4\pi x) \\ \Longleftrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \sinh(2n\pi) c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = 2\sin(2\pi x) + \sin(4\pi x). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $\sinh(8\pi)c_4 = 2$, $\sinh(16\pi)c_8 = 1$ en $c_n = 0$ voor alle andere waarden van n.

De oplossing is dus:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{2}\right) \\ &= \frac{2}{\sinh(8\pi)} \sin(2\pi x)\sinh(2\pi y) + \frac{1}{\sinh(16\pi)} \sin(4\pi x)\sinh(4\pi y). \end{aligned}$$