

Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
woensdag 1 februari 2012, 14:00 - 17:00 uur

HET GEBRUIK VAN EEN REKENMACHINE IS TOEGESTAAN

1. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$ty''(t) - (2t + 1)y'(t) + (t + 1)y(t) = 0, \quad t > 0.$$

(1 pt) (a) Toon aan dat $y_1(t) = e^t$ een oplossing is.

(3 pt) (b) Bepaal de algemene oplossing met behulp van de methode van ordeverlaging.

(3 pt) 2. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = \delta(t - \pi) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

(3 pt) 3. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'(t) = 1 + \int_0^t y(t - \tau) \cos \tau \, d\tau, \quad y(0) = 1.$$

4. Beschouw het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}.$$

(3 pt) (a) Bepaal de matrix e^{At} .

(4 pt) (b) Bepaal de algemene oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$.

(4 pt) 5. Beschouw het niet-lineaire autonome stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = x(y - 2) \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = (x - 2)y.$$

Bepaal alle kritieke punten van dit stelsel en classificeer deze (type en stabiliteit). Welke conclusie kan men hieruit trekken omtrent gedrag en stabiliteit van de oplossingen?

(6 pt) 6. Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen een oplossing van het beginrandwaardeprobleem gedefinieerd door

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 2, \quad 0 < y < 4 \\ u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = 0, & 0 < y < 4 \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, 4) = 2 \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x), & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$