Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
vrijdag 19 april 2013, 14:00 - 17:00 uur

---

1. Dit is opgave 7 van § 3.6.

   De karakteristieke vergelijking is: $r^2+4r+4=0$ oftewel $(r+2)^2=0$. Dus: $r=-2$ (tweemaal). De algemene oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking

$$y''(t)+4y'(t)+4y(t)=0$$

is dus

$$y_h(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}.$$

Voor een particuliere oplossing kunnen we de methode van variatie van de constanten toepassen. Stel daarom:

$$y(t)=u_1(t)e^{-2t}+u_2(t)te^{-2t}.$$

Dan volgt:

$$y'(t)=\underbrace{u_1'(t)e^{-2t}+u_2'(t)te^{-2t}}_{=0}-2u_1(t)e^{-2t}+u_2(t)(1-2t)e^{-2t}$$

en

$$y''(t)=-2u_1'(t)e^{-2t}+u_2'(t)(1-2t)e^{-2t}+4u_1(t)e^{-2t}+u_2(t)(4t-4)e^{-2t}.$$

Invullen geeft dan:

$$-2u_1'(t)e^{-2t}+u_2'(t)(1-2t)e^{-2t}=\frac{e^{-2t}}{t^2}.$$

Dus:

$$\begin{cases} u_1'(t)e^{-2t}+u_2'(t)te^{-2t}=0 \\ -2u_1'(t)e^{-2t}+u_2'(t)(1-2t)e^{-2t}=\dfrac{e^{-2t}}{t^2} \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} u_1'(t)+tu_2'(t)=0 \\ -2u_1'(t)+(1-2t)u_2'(t)=\dfrac{1}{t^2}. \end{cases}$$

Hieruit volgt:

$$u_2'(t)=\frac{1}{t^2}\quad\text{en}\quad u_1'(t)=-tu_2'(t)=-\frac{1}{t}.$$

Dus:

$$u_2(t)=-\frac{1}{t}+c_2\quad\text{en}\quad u_1(t)=-\ln t+c_1.$$

De algemene oplossing is dus:

$$y(t)=-e^{-2t}\ln t-e^{-2t}+c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

2. Vergelijk met opgave 26 van § 6.6.

Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

$$sY(s) - y(0) = \frac{1}{s} - 4 \cdot Y(s) \cdot \frac{1}{s}.$$

Nu is: $y(0) = 1$. Dus volgt:

$$\left(s + \frac{4}{s}\right) Y(s) = 1 + \frac{1}{s} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{s^2+4}{s}\right) Y(s) = \frac{s+1}{s} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4}.$$

Hieruit volgt dat

$$y(t) = \cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t).$$

3. Vergelijk met opgave 7 van § 6.5.

Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t - \frac{\pi}{2}) \sin t \, dt = e^{-\frac{\pi}{2}s} \sin \frac{\pi}{2} = e^{-\frac{1}{2}\pi s}.$$

Nu is: $y(0) = 1$ en $y'(0) = 2$. Dus volgt:

$$(s^2+1)Y(s) = s + 2 + e^{-\frac{1}{2}\pi s} \quad \Longrightarrow \quad Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1} + e^{-\frac{1}{2}\pi s} \cdot \frac{1}{s^2+1}.$$

Terugtransformeren geeft ten slotte:

$$y(t) = \cos t + 2\sin t + u_{\frac{\pi}{2}}(t)\sin(t - \frac{\pi}{2}).$$

4. Zie § 7.9. Vergelijk met voorbeeld 1 en opgave 1.

De karakteristieke vergelijking van A is:

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} 3-r & 2 \\ 2 & 3-r \end{vmatrix} = r^2 - 6r + 9 - 4 = r^2 - 6r + 5 = (r-1)(r-5).$$

De matrix A heeft dus de eigenwaarden 1 en 5. De bijbehorende eigenvctoren volgen uit:

$$r = 1: \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad E_1 = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

en

$$r = 5: \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad E_5 = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Dus:

$$\underline{x}_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Stel nu

$$\underline{x}_p(t) = (\underline{u}_1 t + \underline{u}_2)\, e^t + \underline{v} e^{2t} + \underline{w}_1 t + \underline{w}_2,$$

dan volgt:

$$\begin{aligned}
&\underline{u}_1 te^t + (\underline{u}_1 + \underline{u}_2)e^t + 2\underline{v}e^{2t} + \underline{w}_1 \\
&\quad = A\underline{u}_1 te^t + A\underline{u}_2 e^t + A\underline{v}e^{2t} + A\underline{w}_1 t + A\underline{w}_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 25 \\ 50 \end{pmatrix} t.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$A\underline{u}_1 = \underline{u}_1, \quad A\underline{u}_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2, \quad A\underline{v} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\underline{v},$$
$$A\underline{w}_1 + \begin{pmatrix} 25 \\ 50 \end{pmatrix} = \underline{o} \quad \text{en} \quad A\underline{w}_2 = \underline{w}_1.$$

Dus: $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$ en

$$A\underline{u}_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \quad \text{oftewel} \quad (A - I)\,\underline{u}_2 = \underline{u}_1 - \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} : \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & \alpha - 4 \\ 2 & 2 & -\alpha + 4 \end{array}\right).$$

Dit is alleen oplosbaar als $\alpha - 4 = -\alpha + 4$ oftewel $2\alpha = 8$. Dus: $\alpha = 4$. Dan volgt: $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\underline{u}_2 = \underline{o}$ (bijvoorbeeld). Verder volgt:

$$(A - 2I)\,\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} : \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Hieruit volgt dat $\underline{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ten slotte volgt:

$$\begin{aligned}
A\underline{w}_1 = -\begin{pmatrix} 25 \\ 50 \end{pmatrix} : \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -25 \\ 2 & 3 & -50 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 25 \\ 2 & 3 & -50 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 25 \\ 0 & 5 & -100 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -20 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -20 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned}
A\underline{w}_2 = \underline{w}_1 : \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -20 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 25 \\ 2 & 3 & -20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 25 \\ 0 & 5 & -70 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -14 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ -14 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dus:

$$\underline{x}_p(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 5 \\ -20 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 11 \\ -14 \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing is dus:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 5 \\ -20 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 11 \\ -14 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

5. Zie § 9.2 en § 9.3. Vergelijk met opgave 18 van § 9.3.

Voor de kritieke punten moet gelden

$$\begin{cases} (x-2)(2y-x)=0 & \Longrightarrow \quad x=2 \text{ of } x=2y \\ \\ (y+2)(2x-y)=0 & \Longrightarrow \quad y=-2 \text{ of } y=2x. \end{cases}$$

De vier kritieke punten zijn dus: $(0,0)$, $(-4,-2)$, $(2,-2)$ en $(2,4)$.

Voor elk van deze punten beschouwen we nu het lineaire stelsel

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0) & F_y(x_0,y_0) \\ G_x(x_0,y_0) & G_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix},$$

waarbij

$$\begin{pmatrix} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y-2x+2 & 2x-4 \\ 2y+4 & 2x-2y-2 \end{pmatrix}.$$

Voor $(x_0,y_0)=(0,0)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden $\pm i\sqrt{12}=\pm 2i\sqrt{3}$.

Voor $(x_0,y_0)=(-4,-2)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden ± 6.

Voor $(x_0,y_0)=(2,-2)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden ± 6.

Voor $(x_0,y_0)=(2,4)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden ± 6.

Dit betekent dat $(0,0)$ een centerpunt of een spiraalpunt is, waarbij de stabiliteit onbekend is. De andere punten zijn instabiele zadelpunten (zowel positieve als negatieve eigenwaarden).

6. Zie § 10.8.

Stel $u(x,y) = X(x)Y(y) \neq 0$, dan volgt:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante)}.$$

Hieruit volgt: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $Y''(y) + \sigma Y(y) = 0$.

Uit de randvoorwaarden volgt: $X(0) = 0$, $X(4) = 0$ en $Y(2) = 0$. Dus:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < 4 \\ X(0) = 0, \quad X(4) = 0. \end{cases}$$

(a) Voor $\sigma = 0$ vinden we: $X''(x) = 0$. Dus: $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(4) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

(b) Stel $\sigma = \mu^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(4) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2 \sinh(4\mu) = 0$. Dus: $b_2 = 0$, want $\mu \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(c) Stel $\sigma = -\mu^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(4) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2 \sin(4\mu) = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin(4\mu) = 0 \implies 4\mu = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden:

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{16}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $Y(y)$ vinden we dan $Y''(y) + \sigma Y(y) = 0$ met $Y(2) = 0$. Dus: $Y_n(y) = \sinh\left(\frac{n\pi(2-y)}{4}\right)$.
Hieruit volgt dat

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(2-y)}{4}\right).$$

Uit de vierde (inhomogene) randvoorwaarde volgt dan:

$$u(x,0) = \sin(\pi x) - 3\sin(2\pi x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right) = \sin(\pi x) - 3\sin(2\pi x).$$

Hieruit volgt dat $c_4 \sinh(2\pi) = 1$, $c_8 \sinh(4\pi) = -3$ en $c_n = 0$ voor alle andere waarden van n. De oplossing is dus:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(2-y)}{4}\right) \\ &= \frac{\sin(\pi x)\sinh(\pi(2-y))}{\sinh(2\pi)} - \frac{3\sin(2\pi x)\sinh(2\pi(2-y))}{\sinh(4\pi)}. \end{aligned}$$