Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
vrijdag 20 april 2012, 14:00 - 17:00 uur

---

1. Zie § 3.6. Vergelijk met opgave 16.

   (a) Voor $y_1(t) = 1 + t$ geldt: $y_1'(t) = 1$ en $y_1''(t) = 0$. Invullen geeft dan:
   $$ty_1''(t) - (1+t)y_1'(t) + y_1(t) = 0 - (1+t) + 1 + t = 0.$$
   Voor $y_2(t) = e^t$ geldt: $y_2'(t) = e^t$ en $y_2''(t) = e^t$. Invullen geeft dan:
   $$ty_2''(t) - (1+t)y_2'(t) + y_2(t) = te^t - (1+t)e^t + e^t = 0.$$

   (b) Stel nu $y(t) = (1+t)u_1(t) + e^t u_2(t)$, dan volgt:
   $$y'(t) = \underbrace{(1+t)u_1'(t) + e^t u_2'(t)}_{=0} + u_1(t) + e^t u_2(t)$$
   en
   $$y''(t) = u_1'(t) + e^t u_2'(t) + e^t u_2(t).$$
   Invullen geeft dan:
   $$tu_1'(t) + te^t u_2'(t) + \underline{te^t u_2(t)} - (1+t)u_1(t) \underline{- (1+t)e^t u_2(t)} + (1+t)u_1(t) + \underline{e^t u_2(t)} = 2t^2 e^{2t}$$
   oftewel $tu_1'(t) + te^t u_2'(t) = 2t^2 e^{2t} \implies u_1'(t) + e^t u_2'(t) = 2te^{2t}$. Hieruit volgt:
   $$\left\{\begin{array}{rcl} (1+t)u_1'(t) + e^t u_2'(t) & = & 0 \\ \\ u_1'(t) + e^t u_2'(t) & = & 2te^{2t} \end{array}\right. \implies \quad u_1'(t) = -2e^{2t} \text{ en } u_2'(t) = 2(1+t)e^t.$$
   Hieruit volgt: $u_1(t) = -e^{2t} + c_1$ en $u_2(t) = 2te^t + c_2$. De algemene oplossing is dus
   $$\begin{aligned} y(t) &= (1+t)u_1(t) + e^t u_2(t) = -(1+t)e^{2t} + 2te^{2t} + c_1(1+t) + c_2 e^t \\ &= (t-1)e^{2t} + c_1(1+t) + c_2 e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Zie § 6.1. Vergelijk met opgave 7.

   Voor de Laplace getransformeerde van $\sinh(2t)$ vinden we:
   $$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sinh(2t)\}(s) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{e^{2t}\}(s) - \mathcal{L}\{e^{-2t}\}(s)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{s+2-(s-2)}{(s-2)(s+2)} = \frac{2}{s^2-4}. \end{aligned}$$

3. Zie § 6.5. Vergelijk met opgave 8.

   Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = 2e^{-\frac{1}{4}\pi s}.$$

   Met $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$ volgt dan:

$$(s^2+4)Y(s) = s + 2e^{-\frac{1}{4}\pi s} \quad \Longleftrightarrow \quad Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + e^{-\frac{1}{4}\pi s} \cdot \frac{2}{s^2+4}.$$

   Terugtransformeren geeft dan:

$$y(t) = \cos(2t) + u_{\frac{\pi}{4}}(t)\sin 2(t - \frac{\pi}{4}).$$

4. Zie § 7.8. Vergelijk met opgave 18.

   De karakteristieke vergelijking van A is:

$$\begin{aligned}|A - rI| = \begin{vmatrix} -2-r & 0 & 1 \\ -1 & -1-r & 1 \\ -1 & 0 & -r \end{vmatrix} &= (-1-r)\begin{vmatrix} -2-r & 1 \\ -1 & -r \end{vmatrix} \\ &= -(1+r)(r^2+2r+1) = -(r+1)^3.\end{aligned}$$

   De matrix A heeft dus een drievoudige eigenwaarde -1 (gegeven).

   We bepalen nu de eigenvectoren van A bij de eigenwaarde $r = -1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad E_{-1} = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

   Voor een gegeneraliseerde eigenvector $\underline{v}$ moet dan gelden: $(A - I)\underline{v} = \underline{u}$, waarbij $\underline{u}$ een geschikt gekozen eigenvector van A is. We moeten daarom α en β zo kiezen dat het volgende stelsel oplosbaar is:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ -1 & 0 & 1 & \beta \\ -1 & 0 & 1 & \alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \beta - \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

   Hieruit volgt dat we $\beta = \alpha$ moeten kiezen. Als we nu $\beta = \alpha = 1$ kiezen, dan volgt:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(bijv.)}.$$

   De algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen is dus

$$\underline{x}(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-t} + c_3\begin{pmatrix} t \\ t \\ t+1 \end{pmatrix}e^{-t}.$$

5. Zie § 9.2 en § 9.3.

   Voor de kritieke punten moet gelden

$$\begin{cases} (x^2-1)(y-2)=0 & \Longrightarrow \quad x=\pm 1 \text{ of } y=2 \\ \\ (x^2-4)(y-1)=0 & \Longrightarrow \quad x=\pm 2 \text{ of } y=1. \end{cases}$$

   De vier kritieke punten zijn dus: $(-1,1)$, $(1,1)$, $(-2,2)$ en $(2,2)$.

   Voor elk van deze punten beschouwen we nu het lineaire stelsel

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0) & F_y(x_0,y_0) \\ G_x(x_0,y_0) & G_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix},$$

   waarbij

$$\begin{pmatrix} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(y-2) & x^2-1 \\ 2x(y-1) & x^2-4 \end{pmatrix}.$$

   Voor $(x_0,y_0)=(-1,1)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden 2 en -3.

   Voor $(x_0,y_0)=(1,1)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden -2 en -3.

   Voor $(x_0,y_0)=(-2,2)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden $\pm i\sqrt{12}=\pm 2i\sqrt{3}$.

   Voor $(x_0,y_0)=(2,2)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden $\pm\sqrt{12}=\pm 2\sqrt{3}$.

   Dit betekent dat $(-1,1)$ en $(2,2)$ instabiele zadelpunten zijn (zowel positieve als negatieve eigenwaarden). Verder is $(1,1)$ een asymptotisch stabiele knoop (twee negatieve eigenwaarden) en is $(-2,2)$ een centerpunt of een spiraalpunt, waarbij de stabiliteit onbekend is.

6. Zie § 10.7. Dit is een warmteprobleem voor een **geïsoleerd** metalen staafje.

   Stel $u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$, dan volgt:

$$25X''(x)T(t)=X(x)T'(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{25}\cdot\frac{T'(t)}{T(t)}=\sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

   Hieruit volgt: $X''(x)-\sigma X(x)=0$ en $T'(t)-25\sigma T(t)=0$.

   Uit de randvoorwaarden volgt dat $X'(0)=0$ en $X'(5)=0$. Voor $X(x)$ hebben we dus het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} X''(x)-\sigma X(x)=0, \quad 0<x<5 \\ \\ X'(0)=0, \quad X'(5)=0. \end{cases}$$

   We onderscheiden de volgende mogelijkheden:

   (a) Stel $\sigma=0$, dan volgt: $X''(x)=0$. Dus: $X(x)=a_1x+a_2$. Dan volgt: $X'(x)=a_1$. Uit de randvoorwaarden volgt dus dat $a_1=0$. Dus: $\sigma=0$ is een eigenwaarde met bijbehorende eigenfunctie $X_0(x)=1$ (een constante). Voor $T(t)$ vinden we dan: $T_0(t)=1$ (een constante).

(b) Stel $\sigma = \mu^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1 \cosh(\mu x) + b_2 \sinh(\mu x)$. Hieruit volgt dat $X'(x) = \mu b_1 \sinh(\mu x) + \mu b_2 \cosh(\mu x)$. Uit $X'(0) = 0$ volgt dan: $\mu b_2 = 0$ en dus $b_2 = 0$ (want: $\mu \neq 0$). Uit $X'(5) = 0$ volgt dan: $\mu b_1 \sinh(5\mu) = 0$. Omdat $\sinh(5\mu)$ alleen nul is voor $\mu = 0$ volgt hieruit dat ook $b_1 = 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(c) Stel $\sigma = -\mu^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$. Hieruit volgt dat $X'(x) = -\mu c_1 \sin(\mu x) + \mu c_2 \cos(\mu x)$. Uit $X'(0) = 0$ volgt dan: $\mu c_2 = 0$ en dus $c_2 = 0$ (want: $\mu \neq 0$). Uit $X'(5) = 0$ volgt dan: $-\mu c_1 \sin(5\mu) = 0$. Hierin kan c_1 willekeurig worden gekozen als $5\mu = n\pi$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden: $\sigma_n = -\dfrac{n^2\pi^2}{25}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$ met bijbehorende eigenfuncties $X_n(x) = \cos\left(\dfrac{n\pi x}{5}\right)$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Voor $T(t)$ volgt dan: $T'(t) - 25\sigma T(t) = 0 \iff T'(t) + n^2\pi^2 T(t) = 0$ en dus $T_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t}$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$.

We vinden dus $u_0(x,t) = X_0(x)T_0(t) = 1$ en $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t}\cos\left(\dfrac{n\pi x}{5}\right)$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus:

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t} \cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right).$$

Ten slotte volgt dan:

$$\begin{aligned} & u(x,0) = 4 + \cos(\pi x) - 2\cos(2\pi x) \\ & \qquad \iff \quad \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right) = 4 + \cos(\pi x) - 2\cos(2\pi x). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $c_0 = 8$, $c_5 = 1$, $c_{10} = -2$ en dat de overige coëfficiënten gelijk aan nul zijn. De oplossing is dus:

$$u(x,t) = 4 + e^{-25\pi^2 t}\cos(\pi x) - 2e^{-100\pi^2 t}\cos(2\pi x).$$