

Tentamen Differentiaalvergelijkingen  
wi2051WbMT  
vrijdag 20 april 2012, 14:00 - 17:00 uur

HET GEBRUIK VAN EEN REKENMACHINE IS TOEGESTAAN

---

1. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$ty''(t) - (1+t)y'(t) + y(t) = 2t^2e^{2t}. \quad (1)$$

(2 pt) (a) Toon aan dat  $y_1(t) = 1 + t$  en  $y_2(t) = e^t$  oplossingen zijn van de gereduceerde differentiaalvergelijking  $ty''(t) - (1+t)y'(t) + y(t) = 0$ .

(4 pt) (b) Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking (1) met behulp van de methode van variatie van de constanten.

(3 pt) 2. Toon aan dat de Laplace getransformeerde van de functie  $\sinh(2t) := \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}$  gelijk is aan  $\frac{2}{s^2 - 4}$ .

(5 pt) 3. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 2\delta(t - \frac{\pi}{4}) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

(8 pt) 4. Bepaal de algemene oplossing van het homogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Aanwijzing:*  $A$  heeft een drievoudige eigenwaarde  $-1$  met meetkundige multipliciteit 2.

(4 pt) 5. Beschouw het niet-lineaire autonome stelsel

$$\frac{dx}{dt} = (x^2 - 1)(y - 2) \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = (x^2 - 4)(y - 1).$$

Bepaal alle (*vier*) kritieke punten van dit stelsel en classificeer deze (type en stabiliteit). Welke conclusies kan men hieruit trekken omtrent gedrag/stabiliteit van de oplossingen?

(10 pt) 6. Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen een oplossing van het beginrandwaardeprobleem (warmteprobleem voor een **geïsoleerd** metalen draadje) gedefinieerd door

$$\begin{cases} 25u_{xx} = u_t, & 0 < x < 5, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(5, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 4 + \cos(\pi x) - 2\cos(2\pi x), & 0 \leq x \leq 5. \end{cases}$$