Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
maandag 4 april 2011, 14:00 - 17:00 uur

---

1. Zie § 3.6. Vergelijk met opgave 6.

   De karakteristieke vergelijking is: $r^2 + 4 = 0$ en dus $r = \pm 2i$. De algemene oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking is dus $y_h(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$. Stel nu $y(t) = u_1(t)\cos(2t) + u_2(t)\sin(2t)$ (variatie van de constanten), dan volgt:

$$y'(t) = \underbrace{u_1'(t)\cos(2t) + u_2'(t)\sin(2t)}_{=0} - 2u_1(t)\sin(2t) + 2u_2(t)\cos(2t)$$

   en

$$y''(t) = -2u_1'(t)\sin(2t) + 2u_2'(t)\cos(2t) - 4u_1(t)\cos(4t) - 4u_2(t)\sin(2t).$$

   Invullen geeft dan: $-2u_1'(t)\sin(2t) + 2u_2'(t)\cos(2t) = \dfrac{4}{\cos(2t)}$. Dus:

$$\begin{cases} u_1'(t)\cos(2t) + u_2'(t)\sin(2t) & = & 0 \\ -u_1'(t)\sin(2t) + u_2'(t)\cos(2t) & = & \dfrac{2}{\cos(2t)}. \end{cases}$$

   Hieruit volgt:

$$u_2'(t) = 2 \quad \text{en} \quad u_1'(t) = -\frac{2\sin(2t)}{\cos(2t)}$$

   en dus

$$u_2(t) = 2t + c_2 \quad \text{en} \quad u_1(t) = \ln(\cos(2t)) + c_1.$$

   De algemene oplossing is dus

$$y(t) = u_1(t)\cos(2t) + u_2(t)\sin(2t) = \cos(2t)\ln(\cos(2t)) + 2t\sin(2t) + c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t).$$

2. Zie § 6.4. Vergelijk met opgave 4.

   Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = (1 + e^{-\pi s})\frac{s}{s^2+1}.$$

   Met $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$ volgt dan:

$$(s^2+4)Y(s) = s + (1+e^{-\pi s})\frac{s}{s^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + (1+e^{-\pi s})\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}.$$

Met behulp van breuksplitsing vinden we dan

$$\begin{aligned}\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} &= \frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+4}\\ &= \frac{(A+C)s^3+(B+D)s^2+(4A+C)s+4B+D}{(s^2+1)(s^2+4)}.\end{aligned}$$

Hieruit volgt: $A=\frac{1}{3}$, $C=-\frac{1}{3}$ en $B=D=0$. Dus:

$$Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{3}(1+e^{-\pi s})\left[\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}\right].$$

Terugtransformeren geeft ten slotte:

$$y(t)=\frac{1}{3}\cos t+\frac{2}{3}\cos(2t)+\frac{1}{3}u_\pi(t)\left[\cos(t-\pi)-\cos(2(t-\pi))\right].$$

3. Dit is opgave 28 van § 6.6.

   Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)=Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

$$sY(s)-y(0)-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^3}\cdot Y(s)=-\frac{1}{s^2}.$$

   Met $y(0)=1$ volgt dan

$$\left(s-\frac{1}{s^3}\right)Y(s)=1-\frac{1}{s^2}=\frac{s^2-1}{s^2}\quad\Longrightarrow\quad Y(s)=\frac{s^2-1}{s^2}\cdot\frac{s^3}{s^4-1}=\frac{s}{s^2+1}.$$

   Terugtransformeren geeft dan: $y(t)=\cos t$.

4. Vergelijk met opgave 18 van § 7.8.

   De karakteristieke vergelijking van A is:

$$|A-rI|=\begin{vmatrix}1-r & 0 & 0\\ 1 & 2-r & -1\\ 1 & 1 & -r\end{vmatrix}=(1-r)\begin{vmatrix}2-r & -1\\ 1 & -r\end{vmatrix}=(1-r)(r^2-2r+1)=(1-r)^3.$$

   De matrix A heeft dus een drievoudige eigenwaarde 1 (gegeven).

   We bepalen nu de eigenvectoren van A bij de eigenwaarde $r=1$:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\longrightarrow\quad E_1=\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}.$$

   Voor een gegeneraliseerde eigenvector $\underline{v}$ moet dan gelden: $(A-I)\underline{v}=\underline{u}$, waarbij $\underline{u}$ een geschikt gekozen eigenvector van A is. We moeten daarom α en β zo kiezen dat het volgende stelsel oplosbaar is:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&\alpha\\1&1&-1&\beta\\1&1&-1&\alpha+\beta\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&\beta\\0&0&0&\alpha\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Hieruit volgt dat we $\alpha = 0$ moeten kiezen. Als we nu $\beta = 1$ kiezen, dan volgt:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(bijv.)}.$$

De algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen is dus

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} e^t.$$

5. Zie § 9.2 en § 9.3. Dit is opgave 18 van § 9.3.

Voor de kritieke punten moet gelden

$$\begin{cases} (y-1)(y-2x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 1 \text{ of } y = 2x \\ \\ (x+2)(x-2y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -2 \text{ of } x = 2y. \end{cases}$$

De vier kritieke punten zijn dus: $(0,0)$, $(2,1)$, $(-2,1)$ en $(-2,-4)$.

Voor elk van deze punten beschouwen we nu het lineaire stelsel

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0) & F_y(x_0,y_0) \\ G_x(x_0,y_0) & G_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

waarbij

$$\begin{pmatrix} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(y-1) & 2y-2x-1 \\ 2x-2y+2 & -2(x+2) \end{pmatrix}.$$

Voor $(x_0, y_0) = (0,0)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 6 = (\lambda+1)^2 - 7 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -1 \pm \sqrt{7}.$$

Voor $(x_0, y_0) = (2,1)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ 4 & -8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 8\lambda + 12 = (\lambda+2)(\lambda+6) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = -2 \text{ en } \lambda_2 = -6.$$

Voor $(x_0, y_0) = (-2,1)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 5 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 20 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \pm 2i\sqrt{5}.$$

Voor $(x_0, y_0) = (-2, -4)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & -5 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 30 = (\lambda - 5)^2 + 5 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 5 \pm i\sqrt{5}.$$

Dit betekent dat $(0, 0)$ een instabiel zadelpunt is (zowel positieve als negatieve eigenwaarden). Verder is $(2, 1)$ een asymptotisch stabiele knoop (twee negatieve eigenwaarden) en $(-2, 1)$ een spiraal- of centerpunt, waarvan de stabiliteit onbekend is. Ten slotte is $(-2, -4)$ een instabiel spiraalpunt (twee niet-reële eigenwaarden met positief reëel deel).

6. Zie § 10.8. Dit is een Dirichletprobleem voor een cirkel(vormig gebied).

   Stel $u(r, t) = R(r)T(t) \neq 0$, dan volgt:

$$\begin{aligned} &R''(r)T(t) + \frac{1}{r}R'(r)T(t) + \frac{1}{r^2}R(r)T''(t) = 0 \\ \Longrightarrow \quad &r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{T''(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).} \end{aligned}$$

   Hieruit volgt: $r^2R''(r) + rR'(r) - \sigma R(r) = 0$ en $T''(t) + \sigma T(t) = 0$.

   Nu moet $T(t)$ moet periodiek zijn met periode 2π en $R(r)$ begrensd (voor $r \to 0$).

   (a) Stel $\sigma = 0$, dan volgt: $T''(t) = 0$. Dus: $T(t) = a_1 t + a_2$. Dit is alleen periodiek als $a_1 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is een eigenwaarde met bijbehorende eigenfunctie $T_0(t) = 1$ (een constante). Voor $R(r)$ vinden we dan: $r^2R''(r) + rR'(r) = 0$ (Euler vergelijking) met als oplossing $R(r) = k_1 + k_2 \ln r$. Dit is alleen begrensd voor $r \to 0$ als $k_2 = 0$. Dit levert de eigenfunctie $R_0(r) = 1$ (een constante).

   (b) Stel $\sigma = -\mu^2 < 0$, dan volgt: $T''(t) - \mu^2 T(t) = 0$ en dus $T(t) = b_1 \cosh \mu t + b_2 \sinh \mu t$. Dit is alleen periodiek als $b_1 = b_2 = 0$. Er zijn dus geen negatieve eigenwaarden.

   (c) Stel $\sigma = \mu^2 > 0$, dan volgt: $T''(t) + \mu^2 T(t) = 0$ en dus $T(t) = c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t$. Deze oplossingen zijn alleen periodiek met periode 2π (voor alle c_1 en c_2) als $\mu = n$ geheel. Er zijn dus positieve eigenwaarden: $\sigma_n = n^2$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$ met bijbehorende eigenfuncties

$$T_n(t) = c_n \cos(n\,t) + k_n \sin(n\,t), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

   Voor $R(r)$ vinden we dan de Euler vergelijking

$$r^2R''(r) + rR'(r) - n^2R(r) = 0 \quad \Longrightarrow \quad R(r) = k_1 r^n + k_2 r^{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

   Dit is alleen begrensd voor $r \to 0$ als $k_2 = 0$. We vinden dus de eigenfuncties $R_n(r) = r^n$ met $n = 1, 2, 3, \ldots$.

   Dus:

$$u(r, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[c_n \cos(n\,t) + k_n \sin(n\,t)\right].$$

   Uit de beginvoorwaarde volgt dan dat alle coëfficiënten gelijk aan nul zijn, behalve: $c_0 = 2$, $c_2 = 1$ en $k_3 = -2$. De oplossing is dus:

$$u(r, t) = 1 + r^2 \cos(2\,t) - 2r^3 \sin(3\,t).$$