

Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
maandag 4 april 2011, 14:00 - 17:00 uur

HET GEBRUIK VAN EEN REKENMACHINE IS TOEGESTAAN

- (8 pt) 1. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y''(t) + 4y(t) = \frac{4}{\cos(2t)}, \quad -\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}.$$

- (6 pt) 2. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = \cos(t) + u_\pi(t) \cos(t - \pi) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

- (2 pt) 3. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'(t) - \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau)^2 y(\tau) d\tau = -t, \quad y(0) = 1.$$

- (8 pt) 4. Bepaal de algemene oplossing van het homogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hint: A heeft een drievoudige eigenwaarde 1 met meetkundige multipliciteit 2.

- (4 pt) 5. Beschouw het niet-lineaire autonome stelsel

$$\frac{dx}{dt} = (y - 1)(y - 2x) \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = (x + 2)(x - 2y).$$

Bepaal alle (vier) kritieke punten van dit stelsel en classificeer deze.

Welke conclusies kan men hieruit trekken omtrent gedrag/stabiliteit van de oplossingen?

- (8 pt) 6. Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen een oplossing van het beginrandwaardeprobleem gedefinieerd door

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{tt} = 0, & 0 < r < 2, \quad 0 < t < 2\pi \\ u(2, t) = 1 + 4 \cos(2t) - 16 \sin(3t), & 0 \leq t < 2\pi. \end{cases}$$

Hint: Stel $u(r, t) = R(r)T(t)$ en neem aan dat $R(r)$ begrensd moet zijn voor $r \rightarrow 0$ en dat $T(t)$ periodiek moet zijn met periode 2π . De Euler vergelijking

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \mu^2 R(r) = 0$$

heeft algemene oplossing $R(r) = c_1 r^\mu + c_2 r^{-\mu}$ als $\mu \neq 0$ en $R(r) = k_1 + k_2 \ln r$ als $\mu = 0$.