Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen wi2051WbMT donderdag 15 april 2010, 14:00 - 17:00 uur

---

1. Zie § 4.3. Vergelijk met opgave 15.

   De karakteristieke vergelijking is:

   $$r^3 + 3r^2 - 4 = 0 \quad \text{oftewel} \quad (r-1)(r+2)^2 = 0. \quad \text{Dus: } r = 1 \text{ of } r = -2 \text{ (tweemaal).}$$

   De algemene oplossing van de gereduceerde differentiaalvergelijking is dus

   $$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + c_3 t e^{-2t}.$$

   Voor een particuliere oplossing kunnen we de methode van onbepaalde coëfficiënten toepassen: probeer $y_p(t) = Ae^{2t} + Bt^2e^{-2t}$. Dan volgt: $y_p'(t) = 2Ae^{2t} + B(2t - 2t^2)e^{-2t}$, $y_p''(t) = 4Ae^{2t} + B(2 - 8t + 4t^2)e^{-2t}$ en $y_p^{(3)}(t) = 8Ae^{2t} + B(-12 + 24t - 8t^2)e^{-2t}$. Invullen geeft dan

   $$A(8 + 12 - 4)e^{2t} + B(-12 + 24t - 8t^2 + 6 - 24t + 12t^2 - 4t^2)e^{-2t} = 16e^{2t} + 54e^{-2t}$$

   oftewel

   $$16A^{2t} - 6Be^{-2t} = 16e^{2t} + 54e^{-2t} \quad \Longrightarrow \quad A = 1 \quad \text{en} \quad B = -9.$$

   Dus: $y_p(t) = e^{2t} - 9t^2e^{-2t}$. De algemene oplossing is dus

   $$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = e^{2t} - 9t^2e^{-2t} + c_1e^t + c_2e^{-2t} + c_3te^{-2t}.$$

2. Dit is opgave 27 van § 6.6.

   Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

   $$sY(s) - y(0) + Y(s) = \frac{Y(s)}{s^2+1}.$$

   Met $y(0) = 1$ volgt dan:

   $$\left(s + 1 - \frac{1}{s^2+1}\right)Y(s) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{s^3 + s^2 + s}{s^2+1} \cdot Y(s) = 1.$$

   Met behulp van breuksplitsing vinden we dan

   $$Y(s) = \frac{s^2+1}{s(s^2+s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2+s+1} = \frac{(A+B)s^2 + (A+C)s + A}{s(s^2+s+1)}.$$

   Hieruit volgt: $A = 1$, $B = 0$ en $C = -1$. Dus:

   $$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}.$$

   Terugtransformeren geeft ten slotte:

   $$y(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right).$$

3. Dit is opgave 18 van § 7.8.

We bepalen eerst de eigenvectoren van A bij de eigenwaarde $r = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 8 & -6 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad E_1 = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\}.$$

Voor een gegeneraliseerde eigenvector $\underline{v}$ moet dan gelden: $(A - I)\underline{v} = \underline{u}$, waarbij $\underline{u}$ een geschikt gekozen eigenvector van A is. We moeten daarom α en β zo kiezen dat het volgende stelsel oplosbaar is:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 4 & -3 & -2 & \alpha \\ 8 & -6 & -4 & 2\beta \\ -4 & 3 & 2 & 2\alpha - 3\beta \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 4 & -3 & -2 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha + 2\beta \\ 0 & 0 & 0 & 3\alpha - 3\beta \end{array}\right).$$

Hieruit volgt dat we $\alpha = \beta$ moeten kiezen. Als we nu $\alpha = \beta = 2$ kiezen, dan volgt:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen is dus

$$\underline{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \\ -2t - 1 \end{pmatrix} e^t.$$

4. Zie § 9.2 en § 9.3. Vergelijk met voorbeeld 1 en 2 van § 9.2.

Voor de kritieke punten moet gelden

$$\begin{cases} -(x - y)(1 - x - y) = 0 \\ \\ x(2 + y) = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \quad \text{en} \quad y(1 - y) = 0 \\ \text{of} \\ y = -2 \quad \text{en} \quad -(x + 2)(3 - x) = 0. \end{cases}$$

De vier kritieke punten zijn dus: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-2, -2)$ en $(3, -2)$.

Voor elk van deze punten beschouwen we nu het lineaire stelsel

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

waarbij

$$\begin{pmatrix} F_x(x, y) & F_y(x, y) \\ G_x(x, y) & G_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2x & 1 - 2y \\ 2 + y & x \end{pmatrix}.$$

Voor $(x_0, y_0) = (0, 0)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1 \quad \text{en} \quad \lambda_2 = -2.$$

Voor $(x_0, y_0) = (0, 1)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -1 \\ 3 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 3 = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{11}.$$

Voor $(x_0, y_0) = (-2, -2)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden -2 en -5 en voor $(x_0, y_0) = (3, -2)$ vinden we dan $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden 5 en 3.

Dit betekent dat $(0, 0)$ een instabiel zadelpunt is (zowel positieve als negatieve eigenwaarden). Verder is $(0, 1)$ een asymptotisch stabiel spiraalpunt (niet-reële eigenwaarden met negatief reëel deel). Ten slotte is $(-2, -2)$ een asymptotisch stabiele knoop (twee negatieve eigenwaarden) en $(3, -2)$ een instabiele knoop (twee positieve eigenwaarden).

5. Zie § 10.7. Vergelijk met voorbeeld 1.

Stel $u(x, t) = X(x)T(t) \neq 0$, dan volgt:

$$16X''(x)T(t) = X(x)T''(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{16} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Hieruit volgt: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $T''(t) - 16\,\sigma T(t) = 0$.

Uit de randvoorwaarden volgt: $X(0) = 0$ en $X(2) = 0$. Dus:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, & 0 < x < 2 \\ X(0) = 0, \quad X(2) = 0. \end{cases}$$

(a) Voor $\sigma = 0$ vinden we: $X''(x) = 0$. Dus: $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = X(2) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

(b) Stel $\sigma = \mu^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2 \sinh(2\mu) = 0$. Dus: $b_2 = 0$, want $\mu \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

(c) Stel $\sigma = -\mu^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2 \sin(2\mu) = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin(2\mu) = 0 \Longrightarrow 2\mu = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden:

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $T(t)$ vinden we dan $T''(t) + 4n^2\pi^2 T(t) = 0$ met oplossing

$$T_n(t) = c_n \cos(2n\pi t) + k_n \sin(2n\pi t), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dus:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cos(2n\pi t) + k_n \sin(2n\pi t)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Uit de beginvoorwaarden volgt dan dat $k_n = 0$ voor alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ en

$$u(x, 0) = 2\sin(2\pi x) + \sin(3\pi x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = 2\sin(2\pi x) + \sin(3\pi x).$$

Hieruit volgt dat $c_4 = 2$, $c_6 = 1$ en $c_n = 0$ voor alle andere waarden van n.
De oplossing is dus:

$$u(x, t) = 2\cos(8\pi t)\sin(2\pi x) + \cos(12\pi t)\sin(3\pi x).$$