

Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
donderdag 15 april 2010, 14:00 - 17:00 uur

HET GEBRUIK VAN EEN REKENMACHINE IS TOEGESTAAN

- (5 pt) 1. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y^{(3)}(t) + 3y''(t) - 4y(t) = 16e^{2t} + 54e^{-2t}.$$

Aanwijzing: het karakteristieke polynoom is $r^3 + 3r^2 - 4 = (r - 1)(r + 2)^2$.

- (5 pt) 2. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'(t) + y(t) = \int_0^t \sin(t - \tau)y(\tau) d\tau, \quad y(0) = 1.$$

Aanwijzing: $s^2 + s + 1 = (s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

- (6 pt) 3. Beschouw het homogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aanwijzing: de matrix A heeft een drievoudige eigenwaarde 1.

Bepaal twee lineair onafhankelijke eigenvectoren van A en een geschikte gegeneraliseerde eigenvector en bepaal hiermee de algemene oplossing van het stelsel.

- (5 pt) 4. Beschouw het niet-lineaire autonome stelsel

$$\frac{dx}{dt} = -(x - y)(1 - x - y) \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = x(2 + y).$$

Bepaal alle (vier) kritieke punten van dit stelsel en classificeer deze.

Welke conclusies kan men hieruit trekken omtrent gedrag/stabiliteit van de oplossingen?

- (6 pt) 5. Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen een oplossing van het beginrandwaardeprobleem gedefinieerd door

$$\begin{cases} 16u_{xx} = u_{tt}, & 0 < x < 2, & t > 0 \\ u(0, t) = 0, & u(2, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 2 \sin(2\pi x) + \sin(3\pi x), & u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$