Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, Delft

Uitwerkingen Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
donderdag 2 april 2009, 14:00 - 17:00 uur

---

1. Vergelijk met § 4.2, opgave 35.

   De karakteristieke vergelijking is:

$$r^3 + 2r^2 + r = 0 \iff r(r^2 + 2r + 1) = 0 \iff r(r+1)^2 = 0.$$

   De algemene oplossing is dus: $y(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t}$. Dan volgt: $y'(t) = -c_2 e^{-t} + c_3(1-t)e^{-t}$ en $y''(t) = c_2 e^{-t} + c_3(t-2)e^{-t}$. Dus:

$$\left\{\begin{array}{lrrrcr} y(0) = 1: & c_1 & +c_2 & & = & 1 \\ y'(0) = -2: & & -c_2 & +c_3 & = & -2 \\ y''(0) = 4: & & c_2 & -2c_3 & = & 4 \end{array}\right. \implies c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -2.$$

   De oplossing is dus: $y(t) = 1 - 2te^{-t}$.

   Alternatief: Stel $y'(t) = v(t)$ en los eerst het beginwaardeprobleem

$$\left\{\begin{array}{l} v''(t) + 2v'(t) + v(t) = 0 \\ v(0) = -2, \quad v'(0) = 4 \end{array}\right.$$

   voor $v(t)$ op. Dan volgt: $v(t) = -2e^{-t} + 2te^{-t} = y'(t)$ en dus $y(t) = C - 2te^{-t}$. Uit $y(0) = 1$ volgt dan dat $C = 1$.

2. Vergelijk met § 6.5, opgave 11.

   Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\left[sY(s) - y(0)\right] + Y(s) = \frac{2s}{s^2+1} + e^{-\pi s}.$$

   Met $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$ volgt dan: $(s^2 + 2s + 1)Y(s) = 1 + \dfrac{2s}{s^2+1} + e^{-\pi s}$ en dus

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{(s^2+1)(s^2+2s+1)} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+1} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2}.$$

   Terugtransformeren geeft dan: $y(t) = \sin t + u_\pi(t)(t-\pi)e^{-(t-\pi)}$.

3. Vergelijk met § 6.6, opgave 28.

Stel $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$ is de Laplace getransformeerde van $y(t)$, dan volgt:

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = 2 \cdot \frac{1}{s^2+1} \cdot Y(s).$$

Met $y(0) = 1$ volgt dan:

$$\left(s + 2 - \frac{2}{s^2+1}\right) Y(s) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{s^3+2s^2+s}{s^2+1} \cdot Y(s) = 1.$$

Hieruit volgt:

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s^3+2s^2+s} = \frac{s^2+1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B(s+1)+C}{(s+1)^2},$$

waarbij $A(s+1)^2 + Bs(s+1) + Cs = s^2 + 1$. Hieruit volgt:

$$\begin{cases} A \quad +B \qquad\quad = 1 \\ 2A \quad +B \quad +C = 0 \\ A \qquad\qquad\qquad = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A = 1, \quad B = 0, \quad C = -2.$$

Dus:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{(s+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad y(t) = 1 - 2te^{-t}.$$

4. (a) Dit is opgave 7 van § 7.7. We bepalen eerst de eigenwaarden van A:

$$0 = |A - rI| = \begin{vmatrix} 5-r & -1 \\ 3 & 1-r \end{vmatrix} = r^2 - 6r + 8 = (r-4)(r-2).$$

De eigenwaarden zijn dus: $r_1 = 4$ en $r_2 = 2$. Voor de eigenvectoren vinden we dan:

$$r_1 = 4: \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en

$$r_2 = 2: \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Dus: $\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{2t} \\ e^{4t} & 3e^{2t} \end{pmatrix}$ is een fundamentaalmatrix van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t)$. Dan volgt:

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Psi^{-1}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ten slotte volgt:

$$\begin{aligned} e^{At} = \Psi(t) \cdot \Psi^{-1}(0) &= \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{2t} \\ e^{4t} & 3e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3e^{4t} - e^{2t} & e^{2t} - e^{4t} \\ 3e^{4t} - 3e^{2t} & 3e^{2t} - e^{4t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Vergelijk met opgave 8 van § 7.9. We zoeken een particuliere oplossing van de vorm $\underline{x}_p(t) = \underline{u}e^t + (\underline{v}_1 t + \underline{v}_2)\, e^{2t}$. Invullen geeft dan:

$$\underline{u}e^t + (2\underline{v}_1 t + \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2)\, e^{2t} = A\underline{u}e^t + A\,(\underline{v}_1 t + \underline{v}_2)\, e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Hieruit volgt:

$$A\underline{u} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{u}, \quad A\underline{v}_1 = 2\underline{v}_1 \quad \text{en} \quad A\underline{v}_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2$$

oftewel

$$(A - I)\underline{u} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A - 2I)\underline{v}_1 = \underline{o} \quad \text{en} \quad (A - 2I)\underline{v}_2 = \underline{v}_1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dus:

$$(A - I)\underline{u} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\underline{v}_1$ is een eigenvector van A bij de eigenwaarde 2, dus: $\underline{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en

$$(A - 2I)\underline{v}_2 = \underline{v}_1 - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}: \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & \alpha \\ 3 & -1 & 3\alpha - 2 \end{array}\right).$$

Hieruit volgt dat $\alpha = 1$ en $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dus:

$$\underline{x}_p(t) = \underline{u}e^t + (\underline{v}_1 t + \underline{v}_2)\, e^{2t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

De algemene oplossing is dan:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} t \\ 3t - 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Dit is opgave 14 van § 9.3.

(a) De kritieke punten moeten voldoen aan:

$$\begin{cases} 1 - xy = 0 \\ x - y^3 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = y^3 \quad \text{en} \quad y^4 = 1.$$

Hieruit volgt dat $y = \pm 1$. Voor $y = 1$ volgt dat $x = 1$ en voor $y = -1$ volgt dat $x = -1$. De enige kritieke punten zijn dus: $(-1, -1)$ en $(1, 1)$.

(b) Merk op dat $\begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y & -x \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$.

In $(-1,-1)$ vinden we dan het lineaire stelsel

$$\begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}.$$

En in $(1,1)$ vinden we het lineaire stelsel

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \quad \text{met eigenwaarden} \quad r = -2 \text{ (tweemaal).}$$

(c) Voor het niet-lineaire stelsel betekent dit dat $(-1,-1)$ een instabiel zadelpunt (een positieve en een negatieve eigenwaarde) is en dat $(1,1)$ een asymptotisch stabiele knoop of een asymptotisch stabiel spiraalpunt is.

6. (a) Zie § 10.4. Een Fourier sinusreeks voor f is $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ met $L = 2$ en

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx \\
&= \int_0^1 x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx + \int_1^2 (2-x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,d\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \frac{2}{n\pi}\int_1^2 (2-x)\,d\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \\
&= -\left[\frac{2}{n\pi}\,x\,\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx \\
&\qquad - \left[\frac{2}{n\pi}\,(2-x)\,\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_1^2 + \frac{2}{n\pi}\int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,d(2-x) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \left[\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \left[\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_1^2 \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 1,2,3,\ldots.
\end{aligned}$$

Dus:

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right).$$

(b) Vergelijk met opgave 2 van § 10.8. Stel $u(x,y) = X(x)Y(y) \neq 0$, dan volgt:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \sigma \quad \text{(separatieconstante).}$$

Hieruit volgt: $X''(x) - \sigma X(x) = 0$ en $Y''(y) + \sigma Y(y) = 0$.
Uit de randvoorwaarden volgt: $Y(0) = 0$, $X(0) = 0$ en $X(2) = 0$. Dus:

$$\begin{cases} X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad 0 < x < 2 \\ \\ X(0) = 0, \quad X(2) = 0. \end{cases}$$

i. Voor $\sigma = 0$ vinden we: $X''(x) = 0$. Dus: $X(x) = a_1 x + a_2$. Uit $X(0) = 0$ en $X(2) = 0$ volgt dan $a_1 = a_2 = 0$. Dus: $\sigma = 0$ is geen eigenwaarde.

ii. Stel $\sigma = \mu^2 > 0$, dan volgt: $X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = b_1 \cosh \mu x + b_2 \sinh \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $b_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $b_2 \sinh(2\mu) = 0$. Dus: $b_2 = 0$, want $\mu \neq 0$. Er zijn dus geen positieve eigenwaarden.

iii. Stel $\sigma = -\mu^2 < 0$, dan volgt: $X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$ en dus $X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$. Uit $X(0) = 0$ volgt dan dat $c_1 = 0$. Uit $X(2) = 0$ volgt vervolgens dat $c_2 \sin(2\mu) = 0$. Er bestaan dus niet-triviale oplossingen als $\sin(2\mu) = 0$, dus: $\mu = \dfrac{n\pi}{2}$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$. Er zijn dus negatieve eigenwaarden:

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

met bijbehorende eigenfuncties

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor $Y(y)$ vinden we dan: $Y''(y) - \dfrac{n^2\pi^2}{4} Y(y) = 0$ en $Y(0) = 0$ met oplossingen $Y_n(y) = \sinh\left(\dfrac{n\pi y}{2}\right)$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dus:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{2}\right).$$

Uit de randvoorwaarde $u(x, 1) = f(x)$ volgt ten slotte:

$$u(x, 1) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = f(x).$$

Hieruit volgt met onderdeel (a) dat

$$c_n \sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{8}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

De oplossing is dus:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{2}\right) \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2 \sinh\left(\frac{n\pi}{2}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{2}\right). \end{aligned}$$