

Tentamen Differentiaalvergelijkingen
wi2051WbMT
donderdag 2 april 2009, 14:00 - 17:00 uur

HET GEBRUIK VAN EEN REKENMACHINE IS TOEGESTAAN

- (4 pt) 1. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y^{(3)}(t) + 2y''(t) + y'(t) = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = 4. \end{cases}$$

- (3 pt) 2. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2 \cos t + \delta(t - \pi) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

- (4 pt) 3. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y'(t) + 2y(t) = 2 \int_0^t \sin(t - \tau)y(\tau) d\tau, \quad y(0) = 1.$$

4. Beschouw het inhomogene stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t) \quad \text{met} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

- (4 pt) (a) Bepaal de matrix e^{At} .

- (5 pt) (b) Bepaal de algemene oplossing van $\underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + \underline{g}(t)$.

Z.O.Z.

5. Beschouw het autonome stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen gegeven door

$$\frac{dx}{dt} = 1 - xy \quad \text{en} \quad \frac{dy}{dt} = x - y^3.$$

- (2 pt) (a) Bepaal alle kritieke punten van het stelsel.
- (2 pt) (b) Bepaal het bijbehorende lineaire stelsel in de buurt van elk van de kritieke punten en bereken de eigenwaarden van elk van deze lineaire stelsels.
- (2 pt) (c) Welke conclusies (type en stabiliteit) kan men hieruit trekken met betrekking tot het niet-lineaire stelsel?

6. Beschouw de functie f gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- (4 pt) (a) Bepaal een Fourier sinusreeks voor f .
- (6 pt) (b) Bepaal met behulp van de methode van scheiden van variabelen een oplossing van het randwaardeprobleem gegeven door

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1 \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = f(x), & 0 \leq x \leq 2 \\ u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = 0, & 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$