

1 Tweedimensionale lineaire systemen

1.1 Eigenwaarden en -vectoren

Om een lineair systeem van differentiaalvergelijkingen op te lossen, gaan we gebruik maken van eigenwaarden en eigenvectoren van de vierkante matrix A . Als λ een eigenwaarde is van de matrix A , en v is een eigenvector, dan moet het volgende gelden:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

Eigenwaarden zijn de oplossingen λ die voldoen aan:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Waarbij I de identiteitsmatrix is. Voor een $n \times n$ -matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

geldt dan dus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dit levert een n -degraads polynoom van λ die n wortels heeft.

Bij elke eigenwaarde λ_i hoort een eigenvector v_i . Deze eigenvectoren worden op de volgende manier berekend:

$$(A - \lambda_i I) \cdot v_i = 0$$

1.2 Eendimensionale lineaire differentiaalvergelijkingen

Om een lineair systeem van meerdere differentiaalvergelijkingen op te lossen, kijken we eerst naar het eenvoudigere geval $\dot{x} = ax$. Dit is om te schrijven naar

$$\frac{dx}{dt} = ax \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot dx = a \cdot dt$$

Kies $x_0 = x(0)$, en $x_t = x(t)$.

Nu kunnen we aan beide kanten integreren:

$$\int_{x_0}^{x_t} \frac{1}{x} dx = \int_0^t a \cdot dt \Rightarrow \ln x|_{x_0}^{x_t} = a \cdot t|_0^t$$

$$\Rightarrow \ln x_t - \ln x_0 = a \cdot t \Rightarrow \ln \frac{x_t}{x_0} = a \cdot t$$

$$\Rightarrow \frac{x_t}{x_0} = e^{a \cdot t} \Rightarrow x_t = x_0 \cdot e^{a \cdot t}$$

Een oplossing van dit systeem heeft dus de vorm $x(t) = x_0 \cdot e^{a \cdot t}$.

4.3 Twee dimensionaal

We zoeken nu naar oplossingen voor het tweedimensionale systeem die de vorm

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

hebben. Als er twee lineair onafhankelijke oplossingen

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases}$$

zijn, dan geldt

$$\begin{cases} x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{cases}$$

Hierbij zijn c_1 en c_2 gegeven door de initiële conditie. Er moet dus een oplossing zijn voor

$$c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) = x_0$$

$$c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0$$

voor elke initiële conditie (x_0, y_0) . Dit systeem is alleen op te lossen als de determinant

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

Omdat de oplossingen

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases}$$

lineair onafhankelijk zijn, zal de determinant ongelijk zijn aan nul, en bestaat er dus een oplossing.

Als de initiële conditie op één van de eigenvectoren ligt, zal \mathbf{x}' ook op die eigenvector blijven.

Stel λ_1 en λ_2 zijn de eigenwaarden van matrix \mathbf{A} , en \mathbf{v}_1 en \mathbf{v}_2 de eigenvectoren. Dan geldt

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{x}'_2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_2 = \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{cases}$$

dus

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \\ \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{v}_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \end{cases} \\ \Rightarrow \mathbf{x}(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot \mathbf{v}_2$$

1.4 Voorbeeld

Laten we kijken naar het systeem:

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = -2x - 2y \end{cases}$$
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

We gaan op zoek naar λ 's die voldoen aan:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3 - \lambda)(-2 - \lambda) - 2 \cdot (-2) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Dit levert de eigenwaarden $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = -1$.

De eigenvector $\mathbf{v}_1 = (x, y)$ die bij de eigenwaarde $\lambda_1 = 2$ hoort moet voldoen aan

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 I) \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De eigenvector $\mathbf{v}_2 = (x, y)$ die bij de eigenwaarde $\lambda_2 = -1$ hoort moet voldoen aan

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 I) \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Twee eigenvectoren die voldoen zijn dus $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, en $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

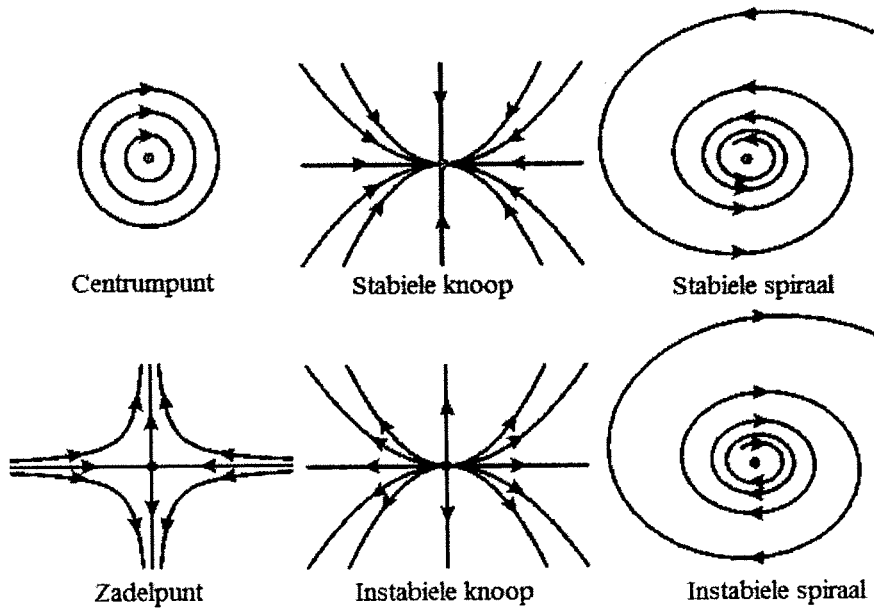
De oplossing van het systeem wordt nu gegeven door:

$$\begin{cases} x(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \\ y(t) = -c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-t} \end{cases}$$

In feite: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}$

4.5 Kritieke punten

Het bovenstaande voorbeeld geeft een van de mogelijke oplossingen van een lineair systeem van differentiaalvergelijkingen. In zo'n stelsel zien we dat het enige kritieke punt $(0, 0)$ is. Het stelsel is immers lineair. Er zijn vier verschillende kritieke punten die kunnen voorkomen. Hierbij kunnen de knoop en de spiraal stabiel of onstabiel zijn, de oplossing beweegt zich dan respectievelijk naar de oorsprong of van de oorsprong af.



De figuur die de oplossing geeft, verhoudt zich op een bepaalde manier ten opzichte van de eigenwaarden van de matrix \mathbf{A} . Als de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, kunnen we 5 verschillende gevallen onderscheiden:

- | | |
|--------------------------------|------------------|
| $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ | <i>geval</i> (1) |
| $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ | <i>geval</i> (2) |
| $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ | <i>geval</i> (3) |
| $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ | <i>geval</i> (4) |
| $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$ | <i>geval</i> (5) |

Merk op dat het omkeren van het teken van de eigenwaarden, alleen de richting van de pijlen omdraait, de gevallen (1) en (3) zullen dus min of meer aan elkaar gelijk zijn. Hierbinnen kunnen we nog onderscheid maken tussen de gevallen $\lambda_1 = \lambda_2$ en $\lambda_1 < \lambda_2$.

Voor het stelsel

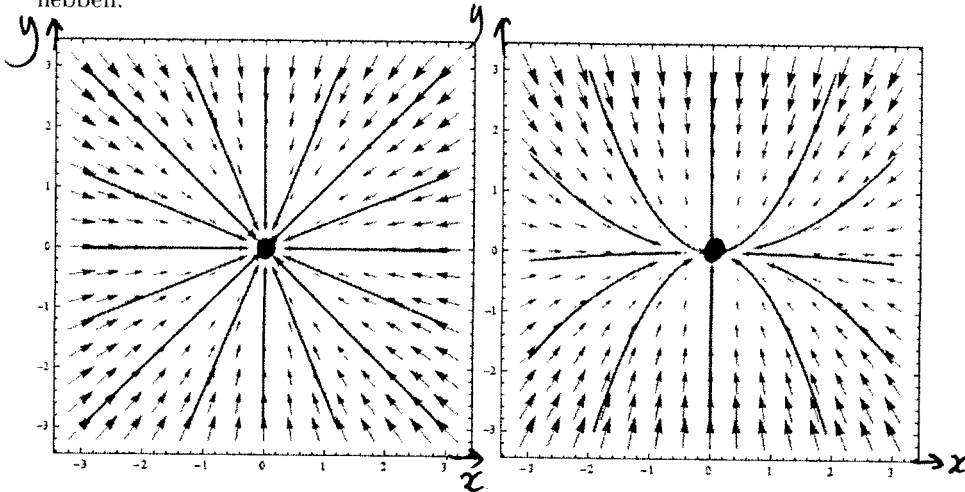
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vinden we de eigenwaarden $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Voor het stelsel

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2y \end{cases}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vinden we de eigenwaarden $\mu_1 = -2, \mu_2 = -1$.

Wanneer we de faseplaatjes tekenen, zien we dat deze de vorm van een knoop hebben:



Figuur 1: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0$, (1)

geval

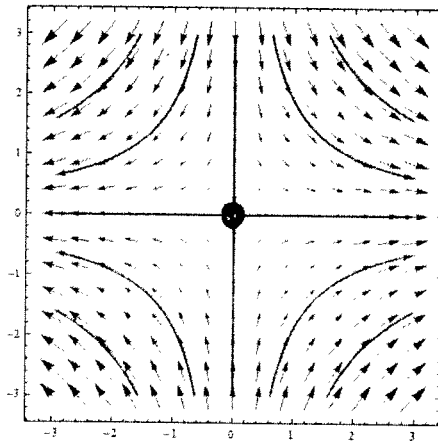
Figuur 2: $\mu_1 = -2 < \mu_2 = -1 < 0$, (1)

geval

Voor het stelsel

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vinden we de eigenwaarden $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$. Het faseplaatje dat hierbij hoort, heeft de vorm van een zadelpunt:



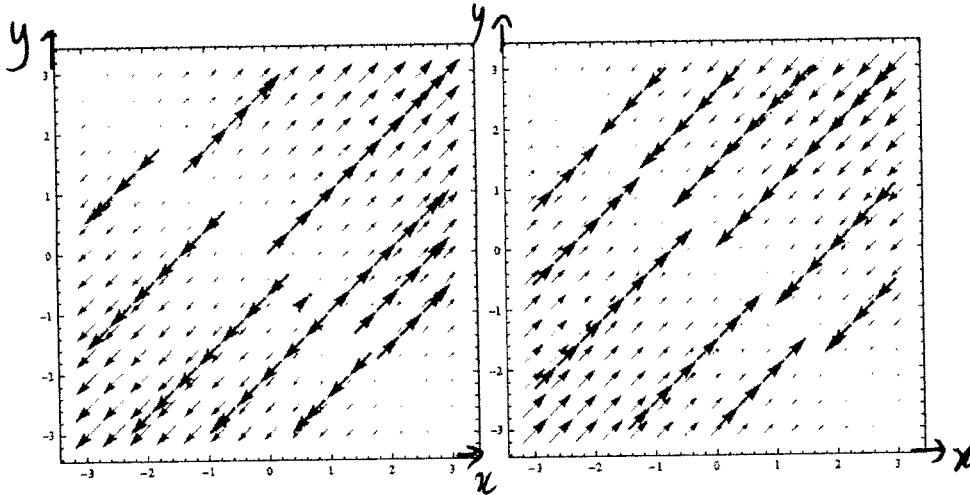
Figuur 3: $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, (2)

geval

Een stelsel differentiaalvergelijkingen waarbij één van de eigenwaarden gelijk is aan nul, wordt gegeven door

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x + y \end{cases}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bij dit stelsel horen de eigenwaarden $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$. We zien dat het kritieke punt in dit geval geen punt, maar een lijn is:



Figuur 4: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$, (4)

Figuur 5: $\mu_1 = -2, \mu_2 = 0$, (5)

sadel

sadel

Omdat de eigenwaarden van een 2×2 -matrix worden gevonden door het oplossen van een tweedegraads vergelijking, kunnen de eigenwaarden ook niet-reëel zijn. Dan hebben de eigenwaarden de vorm $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi$. Bij de complexe eigenwaarden is er echter een verschil in de volgorde waarin we de eigenwaarden vinden. We zullen dit laten zien aan de hand van een voorbeeld.

Er zijn zes verschillende gevallen te onderscheiden, namelijk:

$$a, b > 0$$

geval (6)

$$a > 0, b < 0$$

geval (7)

$$a < 0, b > 0$$

geval (8)

$$a, b < 0$$

geval (9)

$$a = 0, b > 0$$

geval (10)

$$a = 0, b < 0$$

geval (11)

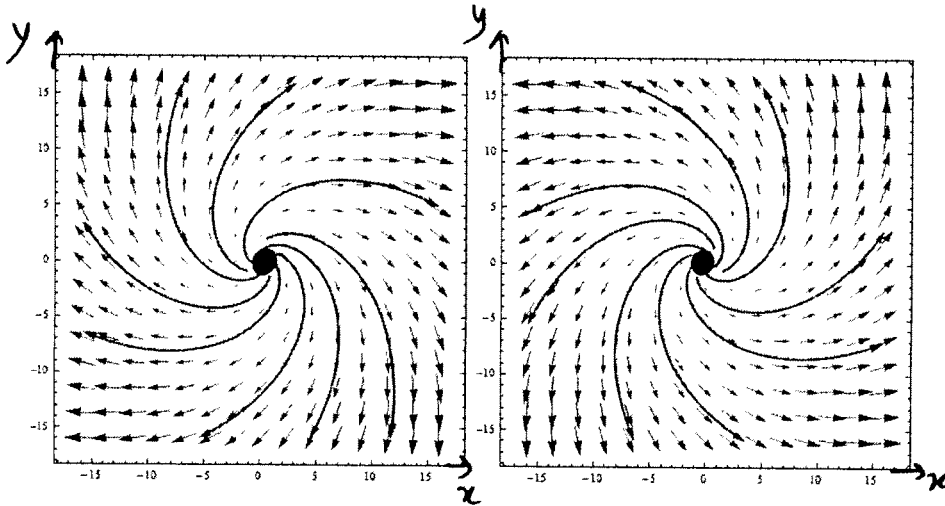
Hier geldt weer dat geval (6) vrijwel gelijk is aan geval (8), en geval (7) aan (9), met uitzondering van de richting van de pijlen. Voor het stelsel

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

vinden we de complexe eigenwaarden $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$. Voor het stelsel

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

zijn de complexe eigenwaarden $\mu_1 = 1 - i$, $\mu_2 = 1 + i$. De faseplaatjes zien er dan zo uit:

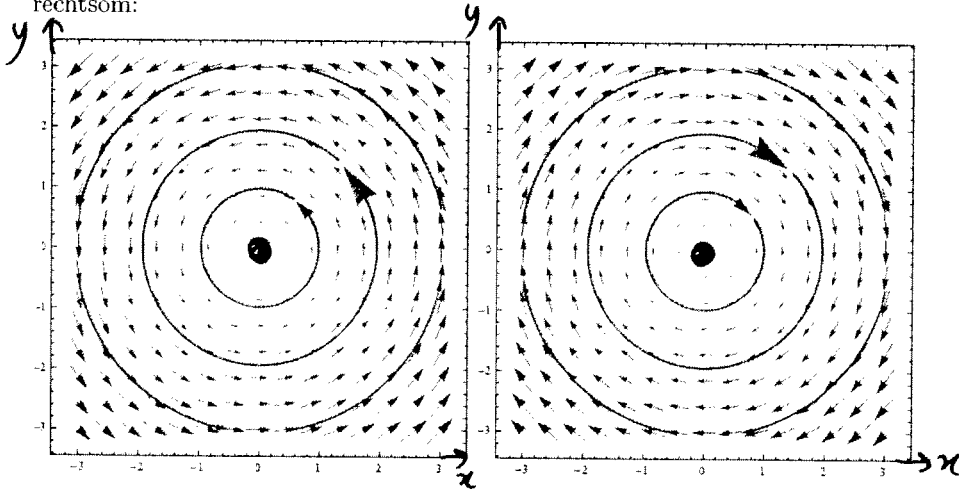


Figuur 6: $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$, (7) *sevel* Figuur 7: $\mu_1 = 1 - i$, $\mu_2 = 1 + i$, (8) *sevel*

Als laatste de speciale stelsels

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bij het eerste stelsel horen de eigenwaarden $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ en bij het tweede $\mu_1 = -i$, $\mu_2 = i$. a is hier dus gelijk aan 0. De faseplaatjes hebben de vorm van een centrumpunt, waarbij het eerste stelsel linksom draait, en het tweede rechtsom:



Figuur 8: $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$, (11) *sevel* Figuur 9: $\mu_1 = 1 - i$, $\mu_2 = 1 + i$, (12) *sevel*

Nog even alle gevallen op een rijtje:

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_2 = 0$
$\lambda_1 > 0$	instabiele knoop	zadelpunt	instabiele knoop (lijn)
$\lambda_1 < 0$	zadelpunt	stabiele knoop	stabiele knoop (lijn)
$\lambda_1 = 0$	instabiele knoop (lijn)	stabiele knoop (lijn)	-

← speciaal
(nada te analyseren)

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

	$b > 0$	$b < 0$
$a > 0$	rechtsdraaiende instabiele spiraal	linksdraaiende instabiele spiraal
$a < 0$	rechtsdraaiende stabiele spiraal	linksdraaiende stabiele spiraal
$a = 0$	linksdraaiend centrumpunt	rechtsdraaiend centrumpunt

§ Systemen met meer dimensies

Als we kijken naar systemen van lineaire differentiaalvergelijkingen met meer dimensies, zullen we merken dat deze niet zo makkelijk meer zijn in te delen als de tweedimensionale systemen. Allereerst zijn er meer dan twee eigenwaarden, wat betekent dat er veel meer mogelijke combinaties van positieve, negatieve en complexe eigenwaarden zijn. Ten tweede hebben de kritieke punten niet meer een duidelijke vorm en naam (zadelpunt, knoop, etc.) en kunnen we ze daarom niet meer aan een specifieke combinatie van eigenwaarden koppelen.

Laten we nog eens kijken waarom de eigenwaarden en -vectoren ons van oplossingen van een stelsel differentiaalvergelijkingen voorzien.

We hebben al gezien dat we voor het oplossen van het lineaire systeem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

op zoek zijn naar oplossingen van de vorm

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$$

Dan geldt

$$\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{v}e^{\lambda t}$$

Dus, om te voldoen aan $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ moet gelden

$$\mathbf{A}\mathbf{v}e^{\lambda t} - \lambda \mathbf{v}e^{\lambda t} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}e^{\lambda t} = \mathbf{0}$$

voor alle t . Dus

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Deze vergelijking heeft n wortels, en deze wortels zijn de eigenwaarden van \mathbf{A} . $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ heeft dus alleen oplossingen van de vorm $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ als λ een eigenwaarde is van \mathbf{A} .

Elke eigenwaarde heeft een multipliciteit van $m < n$. Hierdoor heeft het systeem $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ voor elke eigenwaarde λ_i m oplossingen. Deze hebben de vorm

$$\mathbf{p}_1(t)e^{\lambda_1 t}, \dots, \mathbf{p}_m(t)e^{\lambda_i t}$$

$\mathbf{p}_j(t)$ zijn hier vector polynomen. Hun graad is kleiner dan m . Als iedere eigenwaarde dus maar eenmaal voorkomt, zijn er precies n oplossingen

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

De vectoren \mathbf{v}_i zijn de eigenvectoren behorend bij λ_i .

Als λ een complexe eigenwaarde is, dan is de complex geconjugeerde $\bar{\lambda}$ ook een eigenwaarde. Als we λ schrijven als $a + bi$, dan geldt voor de corresponderende oplossing:

$$\mathbf{v}_1 e^{(a+bi)t} = \mathbf{v}_1 e^{at} e^{ibt}$$

Hierin kunnen we e^{ibt} weer omschrijven naar

$$\cos bt + i \sin bt$$

We zien dus dat het imaginaire deel van de complexe eigenwaarde λ alleen zorgt voor een oscillatie. Het is dus het reële deel van de oplossing dat zorgt voor de stabiliteit.

We kunnen nu stellen dat in een systeem $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ met eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ van \mathbf{A} geldt:

- Het evenwichtspunt is stabiel dan en slechts dan als $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ voor alle eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
- Het evenwichtspunt is instabiel dan en slechts dan als $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ voor tenminste één $\lambda = \lambda_i$

We zullen dit laten zien aan de hand van een voorbeeld.

Beschouw het driedimensionale systeem

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & -2 & -3 \\ 1 & \frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

De eigenwaarden worden gegeven door:

$$\begin{vmatrix} -\frac{9}{4} - \lambda & -2 & -3 \\ 1 & \frac{3}{4} - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \frac{3}{4} - \lambda \end{vmatrix} = -\frac{1}{64}(1 + 4\lambda)(\lambda + \frac{1}{4} + i)(1 + 4\lambda)(\lambda + \frac{1}{4} - i) = 0$$

Dus $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{4} - i$ en $\lambda_3 = -\frac{1}{4} + i$

De eigenvectoren die bij deze eigenwaarden horen, zijn

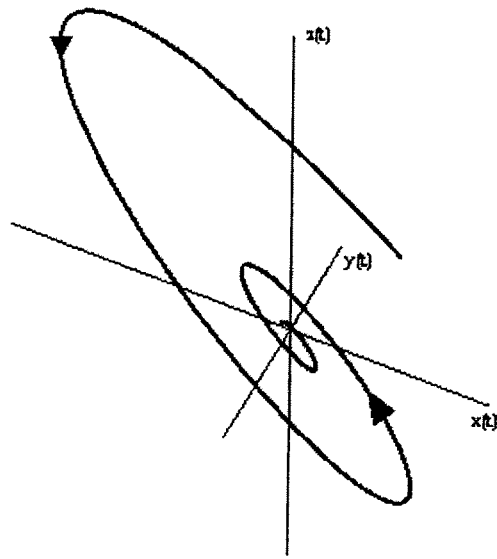
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 - i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 + i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

We kunnen nu een algemene oplossing voor het stelsel geven in de vorm:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-\frac{1}{4}t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{-\frac{1}{4} - it} \mathbf{v}_2 + c_3 e^{-\frac{1}{4} + it} \mathbf{v}_3 \quad (1)$$

Hierin zijn c_1 , c_2 en c_3 reële constanten.

Wanneer we kijken naar de drie eigenwaarden, zien we dat $\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = \operatorname{Re}(\lambda_3) = -\frac{1}{4} < 0$. Het systeem zou dus stabiel moeten zijn. Omdat er twee complexe eigenwaarden zijn die beide zorgen voor een oscillatie, weten we dat het faseplaatje een soort spiraal zal laten zien.



Figuur 10: Stabiele spiraalvormige oplossing \bar{m} in $3D$

3 Lineaire benadering van niet-lineaire systemen

Een niet-lineair systeem van differentiaalvergelijkingen is vaak moeilijk op te lossen. Wanneer we echter kijken naar de kritieke punten, zien we dat deze goed te benaderen zijn door lineaire systemen die we wel op kunnen lossen. Op deze manier kunnen we de kritieke punten toch analyseren, en iets zeggen over het gedrag van het systeem. Als we in het algemeen kijken naar niet-lineaire systemen $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$, en $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is differentieerbaar in een punt \mathbf{a} , dan kunnen we f benaderen in \mathbf{a} met een linearisatie $L(\mathbf{x})$. Dan geldt:

$$f(\mathbf{x}) \approx L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + f_{x_1}(a_1)(x_1 - a_1) + f_{x_2}(a_2)(x_2 - a_2) + \dots + f_{x_n}(a_n)(x_n - a_n)$$

3.1 Tweedimensionale niet-lineaire systemen

Laten we kijken naar het systeem

$$\begin{cases} x' = -x^3 + y \\ y' = x - y^3 \end{cases}$$

De kritieke punten vinden we door beide vergelijkingen gelijk te stellen aan 0, dus:

$$\begin{aligned} -x^3 + y &= x - y^3 = 0 \\ \Rightarrow x^3 &= y, y^3 = x \\ \Rightarrow y^9 &= y, \text{ dus } y = 1, y = -1 \text{ of } y = 0 \end{aligned}$$

Dan vinden we de punten $(1, 1)$, $(-1, -1)$ en $(0, 0)$. We kijken eerst naar het punt $(0, 0)$:

In de buurt van $(0, 0)$ zijn x^3 en y^3 verwaarloosbaar klein. Op die manier kunnen we dit systeem benaderen met het lineaire systeem:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

wat te schrijven is als $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$

$$\text{met } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Deze matrix heeft eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$. Omdat de eigenwaarden reëel zijn, en een tegengesteld teken hebben, weten we uit hoofdstuk 4 dat dit kritieke punt een zadelpunt zal zijn.

Een ander evenwichtspunt bevindt zich in $(1, 1)$. We willen $x' = f(x, y) = -x^3 + y$ en $y' = g(x, y) = x - y^3$ benaderen in $(1, 1)$. Merk op dat

$$f_x(x, y) = -3x^2, f_y(x, y) = 1$$

dus

$$f_x(1, 1) = -3 \text{ en } f_y(1, 1) = 1$$

12

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

▼
Jacobiaan

Hetzelfde kunnen we doen voor $g(x, y)$:

$$g_x(x, y) = 1, f_y(x, y) = -3y^2$$

dus $g_x(1, 1) = 1$ en $g_y(1, 1) = -3$.

Voor de linearisatie geldt nu:

$$f(x, y) \approx f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) = 0 - 3(x - 1) + (y - 1) = -3(x - 1) + 1(y - 1)$$

$$g(x, y) \approx g(1, 1) + g_x(1, 1)(x - 1) + g_y(1, 1)(y - 1) = 0 + (x - 1) - 3(y - 1) = 1(x - 1) - 3(y - 1)$$

Dit levert het stelsel:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

We hebben het systeem benaderd door het in de lineaire vorm $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ te schrijven. De eigenwaarden van de matrix \mathbf{A} worden gegeven door $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$. Beide eigenwaarden zijn kleiner dan nul, dus we zien in de tabel uit hoofdstuk 4 dat we te maken hebben met een stabiele knoop.

Het laatste evenwichtspunt bevindt zich in $(-1, -1)$.

$$f_x(-1, -1) = -3 \text{ en } f_y(-1, -1) = 1$$

$$g_x(-1, -1) = 1 \text{ en } g_y(-1, -1) = -3$$

De benadering in $(-1, -1)$ is dan

$$f(x, y) \approx f(-1, -1) + f_x(-1, -1)(x + 1) + f_y(-1, -1)(y + 1) = 0 - 3(x + 1) + (y + 1) = -3(x + 1) + 1(y + 1)$$

$$g(x, y) \approx g(-1, -1) + g_x(-1, -1)(x + 1) + g_y(-1, -1)(y + 1) = 0 + (x + 1) - 3(y + 1) = 1(x + 1) - 3(y + 1)$$

Dit levert het stelsel:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

De eigenwaarden van de matrix \mathbf{A} zijn hier dus gelijk aan die in het punt $(1, 1)$, namelijk: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$. Het punt $(-1, -1)$ zal dus ook een stabiele knoop zijn.

Wanneer we het faseplaatje proberen te schetsen, kunnen we de richtingscoëfficiënt gebruiken door te achterhalen waar deze gelijk is aan 0, en waar gelijk aan ∞ .

$$\begin{cases} x' = f(x, y) = -x^3 + y \\ y' = g(x, y) = x - y^3 \end{cases}$$

De richtingscoëfficiënt wordt nu gegeven door dx/dy , dus:

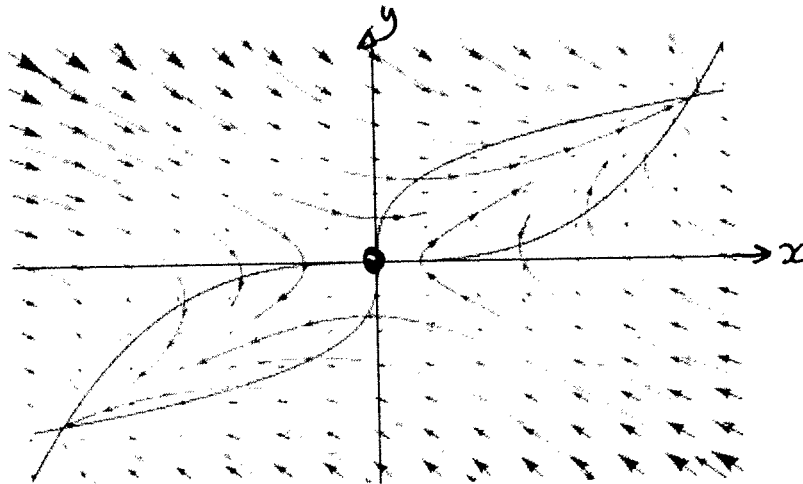
$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{-x^3 + y}{x - y^3}$$

Op de x -as zal de richtingscoëfficiënt gelijk zijn aan $\frac{-x^3}{x} = -x^2$, en op de y -as $\frac{y}{-y^3} = -\frac{1}{y^2}$.

De helling is gelijk aan 0 als $\frac{-x^3 + y}{x - y^3} = 0$, dus als $-x^3 + y = 0$.

De richtingscoëfficiënt is dus 0 als $y = x^3$.

De helling $\frac{dx}{dy}$ is oneindig groot als $x - y^3 = 0$, dus op de lijn $x = y^3$. Met deze informatie kunnen we het faseplaatje schetsen:



Figuur 11: Zadelpunt in (0,0), twee stabiele knopen in (1,1) en (-1,-1)

We zien dat op $x = y^3$ (blauw) de helling steeds gelijk is aan 0, terwijl op $y = x^3$ (rood) de helling steeds gelijk is aan ∞ .

4.2 Van der Pol's vergelijking

Een toepassing van deze tweedimensionale niet-lineaire systemen zien we in de vergelijking van Van der Pol:

$$x'' - \epsilon(1 - x^2)x' + x = 0$$

Deze vergelijking beschrijft de uiteindelijke beweging van een oscillator met niet-lineaire demping. We kunnen dit tweede-orde systeem omschrijven naar een eerste-orde systeem door de substitutie $y = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x'}{\epsilon}$. Dan geldt:

$$\frac{x'}{\epsilon} = x - \frac{x^3}{3} - y$$

$$x' = \epsilon(x - \frac{x^3}{3} - y)$$

Voor y' geldt:

$$y' = x' - x^2 x' - \frac{x''}{\epsilon} = x'(1 - x^2) - \frac{x''}{\epsilon}$$

We weten x'' uit van der Pol's vergelijking:

$$x'' = \epsilon(1 - x^2)x' - x$$

$$\Rightarrow y' = x'(1 - x^2) - ((1 - x^2)x' - x) = \frac{x}{\epsilon}$$

Het evenwichtspunt van dit systeem bevindt zich in $(0, 0)$. We kunnen in dit punt een lineaire benadering geven doordat de term $-\frac{x^3}{3}$ verwaarloosbaar klein is in $(0, 0)$:

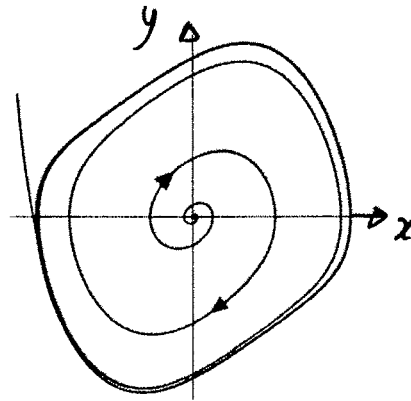
$$x' = \epsilon(x - y)$$

$$y' = \frac{x}{\epsilon}$$

Wanneer we voor $\epsilon = 1/2$ nemen, krijgen we de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

met de eigenwaarden $\lambda_1 = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{15})$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{15})$. We zien dat het reële deel van de complexe eigenwaarden groter dan nul is. Daaruit kunnen we concluderen dat dit systeem rond het evenwichtspunt $(0, 0)$ een instabiele spiraal zal worden.



Figuur 12: Een oplossing van Van der Pol's vergelijking met $\epsilon = 1/2$

3.3 Concurrerende soorten

Een andere toepassing van deze niet-lineaire differentiaalvergelijkingen vinden we in de biologie. We kunnen de groei van een populatie benaderen met behulp van differentiaalvergelijkingen. In het volgende voorbeeld zullen we gaan kijken naar twee populaties die in een gesloten omgeving concurreren om voedsel. Het voorbeeld is een simpele benadering van de situatie waar twee soorten vis in een vijver leven. Zij azen niet op elkaar, maar eten wel hetzelfde voedsel. Omdat er een beperkte hoeveelheid voedsel is, zullen de twee soorten hier om moeten concurreren.

Wanneer we de concurrentie buiten beschouwing laten, kunnen we gebruik maken van de differentiaalvergelijking:

$$x'(t) = x(t)(\epsilon - \sigma x(t))$$

Hierin is ϵ de natuurlijke groei van de populatie, en $\frac{\epsilon}{\sigma}$ het maximale aantal individuen zodat er nog steeds voldoende voedsel is voor de hele populatie. In deze vergelijking is echter nog geen rekening gehouden met de andere soort die ook in de vijver leeft. Beide soorten hebben invloed op $\frac{\epsilon}{\sigma}$ en ook de groefactor zal afnemen bij meer concurrentie om dezelfde hoeveelheid voedsel. Een manier om deze veranderingen in de vergelijking in te passen, is door de groefactor $\epsilon - \sigma x$ te vervangen door $\epsilon - \sigma x - \alpha y$, waar α de mate is waarin de beide soorten op elkaar inwerken. y is hier de populatie van de andere soort. Nu hebben we een nieuw stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(\epsilon_1 - \sigma_1 x(t) - \alpha_1 y(t)) \\ y'(t) = y(t)(\epsilon_2 - \sigma_2 y(t) - \alpha_2 x(t)) \end{cases}$$

We kunnen in dit systeem verschillende waarden van $\epsilon_{1,2}$, $\sigma_{1,2}$ en $\alpha_{1,2}$ invullen. Deze waarden worden over het algemeen gevonden door observatie en zijn soort-specifiek. De waarden die wij gaan gebruiken zijn $\epsilon_1 = \sigma_1 = \alpha_1 = \sigma_2 = 1$, $\epsilon_2 = \frac{3}{4}$ en $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. We zoeken nu dus oplossingen voor het systeem

$$\begin{cases} x' = f(x, y) = x(1 - x - y) \\ y' = g(x, y) = y(\frac{3}{4} - y - \frac{1}{2}x) \end{cases}$$

Allereerst gaan we op zoek naar de evenwichtspunten. Er moet gelden

$$x(1 - x - y) = 0, \quad y(\frac{3}{4} - y - \frac{1}{2}x) = 0$$

$x(1 - x - y) = 0$ als $x = 0$ of als $x = 1 - y$. $x = 0$ invullen in de tweede vergelijking levert $y(\frac{3}{4} - y) = 0$, dus $y = 0$ of $y = \frac{3}{4}$. Twee kritieke punten zijn dus $(0, 0)$ en $(0, \frac{3}{4})$.

$x = 1 - y$ invullen in de tweede vergelijking levert $y(\frac{3}{4} - y - \frac{1}{2}(1 - y)) = y(\frac{3}{4} - y - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y) = y(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}y) = 0$, dus $y = 0$ of $y = \frac{1}{2}$. Voor x levert dit $x = 1$ of $x = \frac{1}{2}$. De laatste twee kritieke punten zijn dus $(1, 0)$ en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Laten we deze punten analyseren aan de hand van een linearisatie. Zo kunnen we zien of er misschien een stabiel evenwicht tussen de beide populaties kan ontstaan.

We berekenen eerst de partiële afgeleides:

$$f_x = 1 - 2x - y, \quad f_y = -x$$

$$g_x = -\frac{1}{2}y, \quad g_y = \frac{3}{4} - 2y - \frac{1}{2}x$$

Linearisatie in $(0, 0)$:

$$f(x, y) \approx f(0, 0) + f_x(0, 0)(x) + f_y(0, 0)(y) = x$$

$$g(x, y) \approx g(0, 0) + g_x(0, 0)(x) + g_y(0, 0)(y) = \frac{3}{4}y$$

Linearisatie in $(0, \frac{3}{4})$

$$f(x, y) \approx f(0, \frac{3}{4}) + f_x(0, \frac{3}{4})(x) + f_y(0, \frac{3}{4})(y - \frac{3}{4}) = \frac{1}{4}x$$

$$g(x, y) \approx g(0, \frac{3}{4}) + g_x(0, \frac{3}{4})(x) + g_y(0, \frac{3}{4})(y - \frac{3}{4}) = \frac{3}{8}x - \frac{3}{4}(y - \frac{3}{4})$$

Linearisatie in $(1, 0)$:

$$f(x, y) \approx f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y) = -(x - 1) - y$$

$$g(x, y) \approx g(1, 0) + g_x(1, 0)(x - 1) + g_y(1, 0)(y) = \frac{1}{4}y$$

Linearisatie in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$f(x, y) \approx f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + f_x(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + f_y(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(y - \frac{1}{2})$$

$$g(x, y) \approx g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + g_x(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + g_y(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}(x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(y - \frac{1}{2})$$

Bij elk kritiek punt kunnen we nu de eigenwaarden uitrekenen:

$$(0, 0) \text{ geeft } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

met de eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = \frac{3}{4}$.

$$(0, \frac{3}{4}) \text{ geeft } \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

met de eigenwaarden $\lambda_1 = -\frac{3}{4}$ en $\lambda_2 = \frac{1}{4}$.

$$(1, 0) \text{ geeft } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

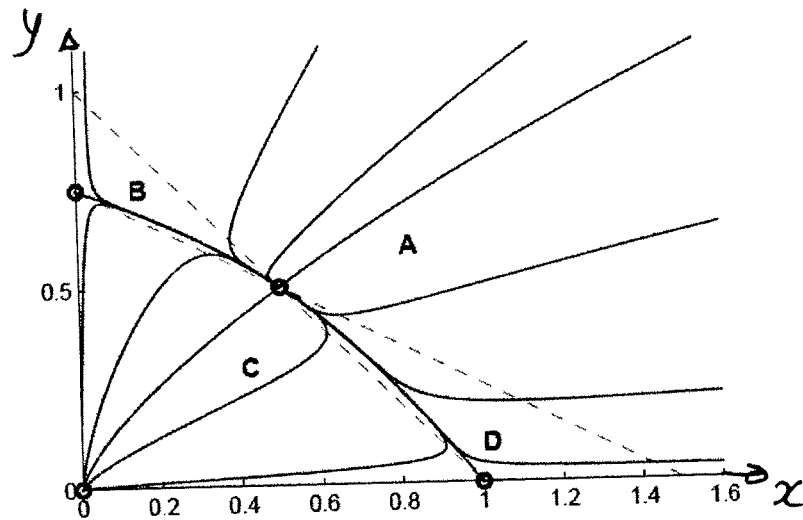
met de eigenwaarden $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = \frac{1}{4}$.

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ geeft } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

met de eigenwaarden $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 0$.

Met deze eigenwaarden kunnen we in de tabel in hoofdstuk twee opzoeken wat de vorm van deze vier evenwichtspunten is: in $(0, 0)$ bevindt zich een instabiele knoop, in $(0, \frac{3}{4})$ en $(1, 0)$ beide een zadelpunt, in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ een stabiele knoop.

Het faseplaatje van het systeem ziet er dan zo uit:



Figuur 13: Stabiel evenwicht in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

De blauwe stippellijnen zijn de lijnen waar x' en y' gelijk zijn aan 0. Op deze manier kunnen we de figuur in vier stukken verdelen. In A zien we dat $x' < 0$ en $y' < 0$, hierdoor zullen alle banen naar links en naar beneden gaan. Ze zullen dus van A naar B of D lopen. In C geldt dat $x' > 0$ en $y' > 0$, hier zullen alle banen dus omhoog en naar rechts gaan en dus weer richting B en D lopen. In B is $x' > 0$, $y' < 0$, dus alle banen lopen naar links en omhoog. Deze banen gaan niet terug naar gebied A of C. Het vectorveld van de lijnen waar $x' = 0$ en $y' = 0$ wijst namelijk in de richting van gebied B en D. Vanuit B zullen alle banen dus naar het punt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gaan. In D geldt hetzelfde, dus omdat $x' < 0$ en $y' > 0$, zullen alle banen hier ook naar $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gaan. Omdat de waarden van x en y alleen positief kunnen zijn, kijken we alleen naar het eerste kwadrant. Hierin zagen we dat iedere initiële waarde van x en y uiteindelijk zal convergeren naar het evenwichtspunt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. De beide soorten kunnen volgens dit model dus naast elkaar bestaan.