Oplossen warmtevergelijking

October 14, 2013

Delft University of Technology

Oplosmethode warmtevergelijking

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$
\begin{array}{rl}
\text{(I)} & u_t = k u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, \; t \geq 0 \\
\text{(II)} & u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad 0 \leq t, \\
\text{(III)} & u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L
\end{array}
$$

Parameter k is groter dan 0; voor 't gemak: schrijf $k = \alpha^2$.

Stap 1: scheiden van variabelen

Zoek oplossingen in de vorm $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Substitutie in (I) – bedenk dat $k = \alpha^2$ – leidt tot

$$T'(t)X(x) = \alpha^2 T(t)X''(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Kan alleen als (A) $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = C$ en (B) $\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 C$.

Oplosmethode warmtevergelijking (2)

$$\begin{array}{rl} \text{(I)} & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \; t \ge 0 \\ \text{(II)} & u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad 0 \le t, \\ \text{(III)} & u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L \end{array}$$

Stap 2: 'gescheiden' vergelijkingen oplossen

Eerst (A): $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = C \quad \Leftrightarrow \quad X''(x) - C\,X(x) = 0$

Merk op: (II): $X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0$ impliceert:
$X(0) = X(L) = 0.$

Kar. vgl. $r^2 - C = 0 \longrightarrow r_{1,2} = \begin{cases} \pm\sqrt{C}, & \text{als } C > 0 \\ 0, & \text{als } C = 0 \\ \pm i\sqrt{-C}, & \text{als } C < 0 \end{cases}$

Oplosmethode warmtevergelijking (3)

In het eerste geval: $X(x) = Ae^{x\sqrt{C}} + Be^{-x\sqrt{C}}$.

Om aan $X(0) = X(L) = 0$ te voldoen:

$A + B = 0, \quad Ae^{L\sqrt{C}} + Be^{-L\sqrt{C}} = 0$ leidt tot $A = B = 0$,

dus tot $X(x) = 0$ (triviale oplossing).

In het tweede geval $(r_{1,2} = 0)$: $X(x) = A + Bx$.
Opnieuw: $X(0) = X(L) = 0 \Rightarrow A = B = 0$.

In het derde geval: schrijf $C = -\sigma^2$, dan $r_{1,2} = \pm i\sigma$, dus
$X(x) = A\cos(\sigma x) + B\sin(\sigma x)$.

$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$,
$X(L) = 0 \Rightarrow B\sin(\sigma L) = 0 \Rightarrow B = 0$ of $\sigma L = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Geeft niet-triviale oplossingen $X_n(x) = B\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$.

Oplosmethode warmtevergelijking (4)

Stapje terug (naar (B)):

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \alpha^2 \frac{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)} = -\alpha^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

Geeft $T(t) = Ce^{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$.

Gevonden (niet-triviale) oplossingen $u(x,t) = X(x)T(t)$ van $u_t = \alpha^2 u_{xx}$: $u_n(x,t) = A_n e^{\left\{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right\}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

Zoek nu oplossing (van (I),(II),(III)) in de vorm

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\left\{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right\}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Oplosmethode warmtevergelijking (5)

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)} && u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \; t \ge 0 \\
&\text{(II)} && u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad 0 \le t, \\
&\text{(III)} && u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L
\end{aligned}
$$

Zoek oplossing in de vorm

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\left\{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right\}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Om aan (III) te voldoen

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = f(x)$$

M.a.w.: hoe kun je een functie f als som van sinusfuncties schrijven?

Voorbeeld vorige keer

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{aligned} &\text{(I)} \quad u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \; t \ge 0 \\ &\text{(II)} \quad u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad 0 \le t, \\ &\text{(III)} \quad u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L \end{aligned}$$

heeft de oplossing

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

met $\quad B_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$

m.a.w. de coëfficiënten van de Fourier sinusreeks van f.

Oplosmethode, de grote lijn

(Driestappenplan)

lft

nology

Oplosmethode, de grote lijn

(Driestappenplan)

1. Variabelen scheiden d.w.z. $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ geeft een
   (i) randwaardeprobleem voor $X(x)$, en vervolgens
   (ii) een beginwaardeprobleem voor $T(t)$

Oplosmethode, de grote lijn

(Driestappenplan)

1. Variabelen scheiden d.w.z. $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ geeft een
   (i) randwaardeprobleem voor $X(x)$, en vervolgens
   (ii) een beginwaardeprobleem voor $T(t)$
2. (i) en (ii) oplossen geeft 'bouwstenen' $u_k(x,t)$

Oplosmethode, de grote lijn

(Driestappenplan)

1. Variabelen scheiden d.w.z. $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ geeft een
   (i) randwaardeprobleem voor $X(x)$, en vervolgens
   (ii) een beginwaardeprobleem voor $T(t)$
2. (i) en (ii) oplossen geeft 'bouwstenen' $u_k(x,t)$
3. Om oplossingen te vinden die voldoet aan gestelde beginvoorwaarden: construeer de gezochte oplossing $u(x,t) = \sum_k A_k \, u_k(x,t)$.

lft
nology

Oplosmethode, de grote lijn

(Driestappenplan)

1. Variabelen scheiden d.w.z. $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ geeft een (i) randwaardeprobleem voor $X(x)$, en vervolgens (ii) een beginwaardeprobleem voor $T(t)$
2. (i) en (ii) oplossen geeft 'bouwstenen' $u_k(x,t)$
3. Om oplossingen te vinden die voldoet aan gestelde beginvoorwaarden: construeer de gezochte oplossing $u(x,t) = \sum_k A_k\, u_k(x,t)$.

   Hier: schrijf een functie $f(x)$ in de vorm

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Oplosmethode, de grote lijn

(Driestappenplan)

1. Variabelen scheiden d.w.z. $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ geeft een
   (i) randwaardeprobleem voor $X(x)$, en vervolgens
   (ii) een beginwaardeprobleem voor $T(t)$

2. (i) en (ii) oplossen geeft 'bouwstenen' $u_k(x,t)$

3. Om oplossingen te vinden die voldoet aan gestelde beginvoorwaarden: construeer de gezochte oplossing
   $$u(x,t) = \sum_k A_k\, u_k(x,t).$$

   Hier: schrijf een functie $f(x)$ in de vorm

   $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sin\left(\tfrac{k\pi}{L}x\right) \qquad \text{(soms: } \sum_{k=0}^{n} b_k \cos\left(\tfrac{k\pi}{L}x\right)$$

Concreet voorbeeld $(\alpha = \frac{1}{2},\ L = 2)$

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$
\begin{aligned}
&(\text{I}) \quad u_t = 1/4 u_{xx}, \quad 0 \le x \le 2,\ t \ge 0 \\
&(\text{II}) \quad u(0,t) = u(2,t) = 0, \quad 0 \le t, \\
&(\text{III}) \quad u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

heeft de oplossing

Concreet voorbeeld $(\alpha = \frac{1}{2},\ L = 2)$

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{array}{rl} \text{(I)} & u_t = 1/4 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 2,\ t \geq 0 \\ \text{(II)} & u(0,t) = u(2,t) = 0, \quad 0 \leq t, \\ \text{(III)} & u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \end{array}$$

heeft de oplossing

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{n^2\pi^2}{4}\right)t} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right), \qquad \text{met}$$

Concreet voorbeeld $(\alpha = \frac{1}{2},\ L = 2)$

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{array}{rl}
\text{(I)} & u_t = 1/4 u_{xx}, \quad 0 \le x \le 2,\ t \ge 0 \\
\text{(II)} & u(0,t) = u(2,t) = 0, \quad 0 \le t, \\
\text{(III)} & u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}
\end{array}$$

heeft de oplossing

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{n^2\pi^2}{4}\right)t} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right), \qquad \text{met}$$

$$B_n = \frac{2}{2}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\,dx = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k \cdot 8}{(2k+1)^2\pi^2}, & \text{als } n = 2k+1 \\ 0, & \text{als } n \text{ even} \end{cases}$$

Met Maple krijg je (soms) mooie plaatjes.

Twee gerelateerde situaties: 1

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{aligned} &\text{(I)} \quad u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, \ t \geq 0 \\ &\text{(II)} \quad u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad 0 \leq t, \\ &\text{(III)} \quad u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{aligned}$$

Nu zijn de ‘basisoplossingen’

lft
nology

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, \ t \geq 0 \\ \text{(II)} \quad & u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad 0 \leq t, \\ \text{(III)} \quad & u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{aligned}$$

Nu zijn de 'basisoplossingen'

$$u_n(x,t) = A_n e^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}\right)t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Twee gerelateerde situaties: 1

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \ t \ge 0 \\ \text{(II)} \quad & u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad 0 \le t, \\ \text{(III)} \quad & u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L \end{aligned}$$

Nu zijn de 'basisoplossingen'

$$u_n(x,t) = A_n e^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}\right)t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

En de de oplossing die aan (III) voldoet wordt

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t\right)} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Twee gerelateerde situaties: 1

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{array}{rl} \text{(I)} & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, \ \ t \geq 0 \\ \text{(II)} & u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad 0 \leq t, \\ \text{(III)} & u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{array}$$

Nu zijn de ‘basisoplossingen’

$$u_n(x,t) = A_n e^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}\right)t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

En de de oplossing die aan (III) voldoet wordt

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t\right)} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

met $A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \quad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \ \ n \geq 1$

(De coëfficiënten van de Fourier cosinusreeks van f.)

Concreet voorbeeld

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)} \quad u_t = 1/4 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 2, \; t \geq 0 \\
&\text{(II)} \quad u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0, \quad 0 \leq t, \\
&\text{(III)} \quad u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Delft University of Technology

Concreet voorbeeld

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad u_t = 1/4 u_{xx}, \quad 0 \le x \le 2, \ t \ge 0 \\ &(\mathrm{II}) \quad u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0, \quad 0 \le t, \\ &(\mathrm{III}) \quad u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases} \end{aligned}$$

heeft de oplossing

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{n^2\pi^2}{4}\right)t} \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right), \qquad \text{met}$$

Delft University of Technology

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$
\begin{array}{rl}
\text{(I)} & u_t = 1/4 u_{xx}, \quad 0 \le x \le 2, \;\; t \ge 0 \\
\text{(II)} & u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0, \quad 0 \le t, \\
\text{(III)} & u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}
\end{array}
$$

heeft de oplossing

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{n^2\pi^2}{4}\right)t} \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right), \qquad \text{met}$$

$$A_0 = \tfrac{1}{2}, \quad \text{en} \quad A_n = \ldots = \begin{cases} \dfrac{-4}{(2k+1)^2\pi^2}, & \text{als } \; n = 4k+2 \\ \quad 0 \quad , & \text{alle andere } \; n \end{cases}$$

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$
\begin{array}{rl}
\text{(I)} & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \; t \ge 0 \\
\text{(II)} & u(0,t) = T_0, \; u(L,t) = T_1, \quad 0 \le t \\
\text{(III)} & u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L
\end{array}
$$

Het idee: voer in $v(x,t) = u(x,t) - \left(T_0 + \frac{T1 - T0}{L} x\right)$.

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, \;\; t \geq 0 \\ \text{(II)} \quad & u(0,t) = T_0, \;\; u(L,t) = T_1, \quad 0 \leq t \\ \text{(III)} \quad & u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{aligned}$$

Het idee: voer in $v(x,t) = u(x,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$.

Dan: $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$,

Situatie 2: inhomogene randvoorwaarden

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \; t \ge 0 \\ &(\mathrm{II}) \quad u(0,t) = T_0, \; u(L,t) = T_1, \quad 0 \le t \\ &(\mathrm{III}) \quad u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L \end{aligned}$$

Het idee: voer in $v(x,t) = u(x,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$.

Dan: $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, en: $\dfrac{\partial v}{\partial x} =$

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{array}{rl} \text{(I)} & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, \ t \geq 0 \\ \text{(II)} & u(0,t) = T_0, \ u(L,t) = T_1, \quad 0 \leq t \\ \text{(III)} & u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{array}$$

Het idee: voer in $v(x,t) = u(x,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$.

Dan: $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$, en: $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{T1-T0}{L}$, dus

Situatie 2: inhomogene randvoorwaarden

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{array}{rl} \text{(I)} & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \ t \ge 0 \\ \text{(II)} & u(0,t) = T_0, \ u(L,t) = T_1, \quad 0 \le t \\ \text{(III)} & u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L \end{array}$$

Het idee: voer in $v(x,t) = u(x,t) - \left(T_0 + \frac{T1 - T0}{L} x\right)$.

Dan: $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, en: $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \frac{T1-T0}{L}$, dus $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} =$

ft
chnology

Situatie 2: inhomogene randvoorwaarden

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$
\begin{array}{rl}
\text{(I)} & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, \ \ t \geq 0 \\
\text{(II)} & u(0,t) = T_0, \ \ u(L,t) = T_1, \quad 0 \leq t \\
\text{(III)} & u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L
\end{array}
$$

Het idee: voer in $v(x,t) = u(x,t) - \left(T_0 + \frac{T1 - T0}{L} x\right)$.

Dan: $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, en: $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \frac{T1-T0}{L}$, dus $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{array}{rl} \text{(I)} & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, \ t \geq 0 \\ \text{(II)} & u(0,t) = T_0, \ u(L,t) = T_1, \quad 0 \leq t \\ \text{(III)} & u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{array}$$

Het idee: voer in $v(x,t) = u(x,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$.

Dan: $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$, en: $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{T1-T0}{L}$, dus $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Gevolg:

Situatie 2: inhomogene randvoorwaarden

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{array}{rl} \text{(I)} & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \;\; t \ge 0 \\ \text{(II)} & u(0,t) = T_0, \;\; u(L,t) = T_1, \quad 0 \le t \\ \text{(III)} & u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L \end{array}$$

Het idee: voer in $v(x,t) = u(x,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$.

Dan: $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, en: $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \frac{T1-T0}{L}$, dus $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Gevolg: $u(x,t)$ is een oplossing van (I) $\Leftrightarrow$
$v(x,t)$ is een oplossing van (I).

Situatie 2: inhomogene randvoorwaarden

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \ t \ge 0 \\
&(\mathrm{II}) \quad u(0,t) = T_0, \ u(L,t) = T_1, \quad 0 \le t \\
&(\mathrm{III}) \quad u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L
\end{aligned}$$

Het idee: voer in $v(x,t) = u(x,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$.

Dan: $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$, en: $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{T1-T0}{L}$, dus $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Gevolg: $u(x,t)$ is een oplossing van (I) $\Leftrightarrow$
$v(x,t)$ is een oplossing van (I). Verder:

Situatie 2: inhomogene randvoorwaarden

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) && u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \ t \ge 0 \\ &(\mathrm{II}) && u(0,t) = T_0, \ u(L,t) = T_1, \quad 0 \le t \\ &(\mathrm{III}) && u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L \end{aligned}$$

Het idee: voer in $v(x,t) = u(x,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$.

Dan: $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$, en: $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{T1-T0}{L}$, dus $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Gevolg: $u(x,t)$ is een oplossing van (I) $\Leftrightarrow$
$v(x,t)$ is een oplossing van (I). Verder:

(III): $u(x,0) = f(x) \longrightarrow v(x,0) = f(x) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$,

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{array}{rl} \text{(I)} & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, \ t \geq 0 \\ \text{(II)} & u(0,t) = T_0, \ u(L,t) = T_1, \quad 0 \leq t \\ \text{(III)} & u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{array}$$

Het idee: voer in $v(x,t) = u(x,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$.

Dan: $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$, en: $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{T1-T0}{L}$, dus $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Gevolg: $u(x,t)$ is een oplossing van (I) $\Leftrightarrow$
$v(x,t)$ is een oplossing van (I). Verder:

(III): $u(x,0) = f(x) \longrightarrow v(x,0) = f(x) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$,

en (II): $v(0,t) = u(0,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L} \cdot 0\right) =$

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{array}{rl} \text{(I)} & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \ t \ge 0 \\ \text{(II)} & u(0,t) = T_0, \ u(L,t) = T_1, \quad 0 \le t \\ \text{(III)} & u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L \end{array}$$

Het idee: voer in $v(x,t) = u(x,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$.

Dan: $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$, en: $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{T1-T0}{L}$, dus $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Gevolg: $u(x,t)$ is een oplossing van (I) $\Leftrightarrow$

$v(x,t)$ is een oplossing van (I). Verder:

(III): $u(x,0) = f(x) \longrightarrow v(x,0) = f(x) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$,

en (II): $v(0,t) = u(0,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L} \cdot 0\right) = T_0 - T_0 = 0$,

Situatie 2: inhomogene randvoorwaarden

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{array}{rl} \text{(I)} & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq L, \ \ t \geq 0 \\ \text{(II)} & u(0,t) = T_0, \ \ u(L,t) = T_1, \quad 0 \leq t \\ \text{(III)} & u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{array}$$

Het idee: voer in $v(x,t) = u(x,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$.

Dan: $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$, en: $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{T1-T0}{L}$, dus $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Gevolg: $u(x,t)$ is een oplossing van (I) $\Leftrightarrow$
$v(x,t)$ is een oplossing van (I). Verder:

(III): $u(x,0) = f(x) \longrightarrow v(x,0) = f(x) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$,

en (II): $v(0,t) = u(0,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L} \cdot 0\right) = T_0 - T_0 = 0$, en
$v(L,t) = u(L,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L} \cdot L\right) =$

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) && u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \ t \ge 0 \\ &(\mathrm{II}) && u(0,t) = T_0, \ u(L,t) = T_1, \quad 0 \le t \\ &(\mathrm{III}) && u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L \end{aligned}$$

Het idee: voer in $v(x,t) = u(x,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$.

Dan: $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$, en: $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{T1-T0}{L}$, dus $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Gevolg: $u(x,t)$ is een oplossing van (I) $\Leftrightarrow$
$v(x,t)$ is een oplossing van (I). Verder:

(III): $u(x,0) = f(x) \longrightarrow v(x,0) = f(x) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$,

en (II): $v(0,t) = u(0,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L} \cdot 0\right) = T_0 - T_0 = 0$, en
$v(L,t) = u(L,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L} \cdot L\right) = T_1 - T_1 = 0$,

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{array}{rl}
\text{(I)} & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \ t \ge 0 \\
\text{(II)} & u(0,t) = T_0, \ u(L,t) = T_1, \quad 0 \le t \\
\text{(III)} & u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L
\end{array}$$

Het idee: voer in $v(x,t) = u(x,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$.

Dan: $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$, en: $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{T1-T0}{L}$, dus $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Gevolg: $u(x,t)$ is een oplossing van (I) $\Leftrightarrow$
$v(x,t)$ is een oplossing van (I). Verder:

(III): $u(x,0) = f(x) \longrightarrow v(x,0) = f(x) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$,

en (II): $v(0,t) = u(0,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L} \cdot 0\right) = T_0 - T_0 = 0$, en
$v(L,t) = u(L,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L} \cdot L\right) = T_1 - T_1 = 0$, dus

Situatie 2: inhomogene randvoorwaarden

Het rand- en beginwaardeprobleem

$$\begin{array}{rl} \text{(I)} & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le L, \;\; t \ge 0 \\ \text{(II)} & u(0,t) = T_0, \;\; u(L,t) = T_1, \quad 0 \le t \\ \text{(III)} & u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L \end{array}$$

Het idee: voer in $v(x,t) = u(x,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$.

Dan: $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, en: $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \frac{T1-T0}{L}$, dus $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Gevolg: $u(x,t)$ is een oplossing van (I) $\Leftrightarrow$

$v(x,t)$ is een oplossing van (I). Verder:

(III): $u(x,0) = f(x) \longrightarrow v(x,0) = f(x) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}x\right)$,

en (II): $v(0,t) = u(0,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}\cdot 0\right) = T_0 - T_0 = 0$, en $v(L,t) = u(L,t) - \left(T_0 + \frac{T1-T0}{L}\cdot L\right) = T_1 - T_1 = 0$, dus v is de oplossing van het eerdere probleem met **homogene** randwaarden.