

("De grote drie")

warmtevergelijking

("De grote drie")

warmtevergelijking $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t)$

("De grote drie")

warmtevergelijking $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t)$

golfvergelijking

("De grote drie")

warmtevergelijking $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t)$

golfvergelijking $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u = u(x, t)$

("De grote drie")

warmtevergelijking $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t)$

golfvergelijking $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u = u(x, t)$

potentiaalvergelijking

Partiële differentiaalvergelijkingen

("De grote drie")

warmtevergelijking $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t)$

golfvergelijking $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u = u(x, t)$

potentiaalvergelijking $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = u(x, y)$

(Driestappenplan)

(Driestappenplan)

- 1 Variabelen scheiden geeft randwaardeprobleem

(Driestappenplan)

- 1 Variabelen scheiden geeft randwaardeprobleem
- 2 Randwaardeprobleem oplossen geeft 'bouwstenen' $u_k(x, t)$
(of $u_k(x, y)$)

(Driestappenplan)

- 1 Variabelen scheiden geeft randwaardeprobleem
- 2 Randwaardeprobleem oplossen geeft 'bouwstenen' $u_k(x, t)$ (of $u_k(x, y)$)
- 3 Om oplossingen te vinden die voldoet aan gestelde begin- en/of randvoorwaarden:
construeer de gezochte oplossing $u(x, t) = \sum_k A_k u_k(x, t)$.

(Driestappenplan)

- 1 Variabelen scheiden geeft randwaardeprobleem
- 2 Randwaardeprobleem oplossen geeft 'bouwstenen' $u_k(x, t)$ (of $u_k(x, y)$)
- 3 Om oplossingen te vinden die voldoet aan gestelde begin- en/of randvoorwaarden:
construeer de gezochte oplossing $u(x, t) = \sum_k A_k u_k(x, t)$.

Vaak: schrijf een functie $f(x)$ in de vorm

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

(Driestappenplan)

- 1 Variabelen scheiden geeft randwaardeprobleem
- 2 Randwaardeprobleem oplossen geeft 'bouwstenen' $u_k(x, t)$ (of $u_k(x, y)$)
- 3 Om oplossingen te vinden die voldoet aan gestelde begin- en/of randvoorwaarden:
construeer de gezochte oplossing $u(x, t) = \sum_k A_k u_k(x, t)$.

Vaak: schrijf een functie $f(x)$ in de vorm

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad (\text{of} \quad \sum_{k=0}^n b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right))$$

- ① Bereken alle oplossingen van het **randwaardeprobleem**

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

To get started

- ① Bereken alle oplossingen van het **randwaardeprobleem**

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

- ② Hetzelfde voor $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

To get started

- 1 Bereken alle oplossingen van het **randwaardeprobleem**

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

- 2 Hetzelfde voor $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

- 3 Bereken alle $\lambda \in \mathbb{R}$ waarvoor het probleem

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

niet-triviale oplossingen heeft.

Hoe zou je in dit geval de algemene oplossing opschrijven?

1 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

- 1 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

- 1 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

Karakteristieke vergelijking: $r^2 + 4 = 0 \rightarrow r =$

- 1 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

Karakteristieke vergelijking: $r^2 + 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2i,$

- 1 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

Karakteristieke vergelijking: $r^2 + 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2i$,

geeft oplossingen $y_1 =$

- 1 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

Karakteristieke vergelijking: $r^2 + 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2i$,

geeft oplossingen $y_1 = \cos(2x)$, $y_2 = \sin(2x)$,

- 1 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

Karakteristieke vergelijking: $r^2 + 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2i$,

geeft oplossingen $y_1 = \cos(2x)$, $y_2 = \sin(2x)$,

dus algemene oplossing: $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$.

- 1 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

Karakteristieke vergelijking: $r^2 + 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2i$,

geeft oplossingen $y_1 = \cos(2x)$, $y_2 = \sin(2x)$,

dus algemene oplossing: $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$.

Randwaarden inbouwen: $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$,

- 1 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

Karakteristieke vergelijking: $r^2 + 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2i$,

geeft oplossingen $y_1 = \cos(2x)$, $y_2 = \sin(2x)$,

dus algemene oplossing: $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$.

Randwaarden inbouwen: $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$,
 $y(\pi) = 0 \Rightarrow C_2$ is vrij!

- 1 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Een eenvoudige (homogene, lineaire, 2de orde) DV.

Karakteristieke vergelijking: $r^2 + 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2i$,

geeft oplossingen $y_1 = \cos(2x)$, $y_2 = \sin(2x)$,

dus algemene oplossing: $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$.

Randwaarden inbouwen: $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$,

$y(\pi) = 0 \Rightarrow C_2$ is vrij!

Het antwoord: $y(x) = C_2 \sin(2x)$.

2 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

2 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \rightarrow r =$

- 2 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2,$

- 2 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2$,
geeft oplossingen $y_1 =$

- 2 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2$,
geeft oplossingen $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$,

- 2 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2$,

geeft oplossingen $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$,

dus algemene oplossing: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

- 2 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2$,

geeft oplossingen $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$,

dus algemene oplossing: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

Randwaarden inbouwen:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \end{cases}$$

- 2 Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2$,

geeft oplossingen $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$,

dus algemene oplossing: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

Randwaarden inbouwen:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^4 + C_2 e^{-4} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

- 2 Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2$,

geeft oplossingen $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$,

dus algemene oplossing: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

Randwaarden inbouwen:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^4 + C_2 e^{-4} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

- 2 Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 - 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2$,

geeft oplossingen $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$,

dus algemene oplossing: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

Randwaarden inbouwen:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^4 + C_2 e^{-4} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

De enige oplossing: $y(x) = 0$ (de 'triviale' oplossing)

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

Drie gevallen: (1) $\lambda < 0$, (2) $\lambda = 0$, (3) $\lambda > 0$.

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

Drie gevallen: (1) $\lambda < 0$, (2) $\lambda = 0$, (3) $\lambda > 0$.

geval 1 Schrijf $\lambda = -\omega^2$.

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

Drie gevallen: (1) $\lambda < 0$, (2) $\lambda = 0$, (3) $\lambda > 0$.

geval 1 Schrijf $\lambda = -\omega^2$. Dan $r_{1,2} = \pm\omega$.

Algemene oplossing van de DV: $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$.

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

Drie gevallen: (1) $\lambda < 0$, (2) $\lambda = 0$, (3) $\lambda > 0$.

geval 1 Schrijf $\lambda = -\omega^2$. Dan $r_{1,2} = \pm\omega$.

Algemene oplossing van de DV: $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$.

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = y(2) = 0$:

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

Drie gevallen: (1) $\lambda < 0$, (2) $\lambda = 0$, (3) $\lambda > 0$.

geval 1 Schrijf $\lambda = -\omega^2$. Dan $r_{1,2} = \pm\omega$.

Algemene oplossing van de DV: $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$.

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = y(2) = 0$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ \end{cases}$$

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

Drie gevallen: (1) $\lambda < 0$, (2) $\lambda = 0$, (3) $\lambda > 0$.

geval 1 Schrijf $\lambda = -\omega^2$. Dan $r_{1,2} = \pm\omega$.

Algemene oplossing van de DV: $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$.

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = y(2) = 0$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{2\omega} + C_2 e^{-2\omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

Drie gevallen: (1) $\lambda < 0$, (2) $\lambda = 0$, (3) $\lambda > 0$.

geval 1 Schrijf $\lambda = -\omega^2$. Dan $r_{1,2} = \pm\omega$.

Algemene oplossing van de DV: $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$.

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = y(2) = 0$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{2\omega} + C_2 e^{-2\omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0 \end{cases}$$

Karakteristieke vergelijking: $r^2 = -\lambda$.

Drie gevallen: (1) $\lambda < 0$, (2) $\lambda = 0$, (3) $\lambda > 0$.

geval 1 Schrijf $\lambda = -\omega^2$. Dan $r_{1,2} = \pm\omega$.

Algemene oplossing van de DV: $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$.

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = y(2) = 0$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{2\omega} + C_2 e^{-2\omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

De enige oplossing: $y(x) = 0$ (de 'triviale' oplossing)

- 3 Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$:

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1x + C_2$.

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:

(weer) $y(x) = 0$.

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:

(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

- 3 Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:

(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2y = 0$:

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:

(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2y = 0$:

$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$.

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:
(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2 y = 0$:

$$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x).$$

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = 0$: $y(x) =$

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:

(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2y = 0$:

$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$.

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = 0$: $y(x) = C_2 \sin(\omega x)$.

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:
(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2 y = 0$:

$$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x).$$

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = 0$: $y(x) = C_2 \sin(\omega x)$.

Om te voldoen aan $y(2) = 0$: $C_2 \sin(2\omega) = 0$.

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:

(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2 y = 0$:

$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$.

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = 0$: $y(x) = C_2 \sin(\omega x)$.

Om te voldoen aan $y(2) = 0$: $C_2 \sin(2\omega) = 0$.

Nu zijn er **wel** niet-triviale oplossingen als: $\sin(2\omega) = 0$,

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:

(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2 y = 0$:

$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$.

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = 0$: $y(x) = C_2 \sin(\omega x)$.

Om te voldoen aan $y(2) = 0$: $C_2 \sin(2\omega) = 0$.

Nu zijn er **wel** niet-triviale oplossingen als: $\sin(2\omega) = 0$,
dus als: $\omega =$

- 3 Bereken alle oplossingen van $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:

(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2 y = 0$:

$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$.

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = 0$: $y(x) = C_2 \sin(\omega x)$.

Om te voldoen aan $y(2) = 0$: $C_2 \sin(2\omega) = 0$.

Nu zijn er **wel** niet-triviale oplossingen als: $\sin(2\omega) = 0$,

dus als: $\omega = \frac{k\pi}{2}$.

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:

(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2 y = 0$:

$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$.

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = 0$: $y(x) = C_2 \sin(\omega x)$.

Om te voldoen aan $y(2) = 0$: $C_2 \sin(2\omega) = 0$.

Nu zijn er **wel** niet-triviale oplossingen als: $\sin(2\omega) = 0$,

dus als: $\omega = \frac{k\pi}{2}$. **Conclusie:**

- 3 Bereken alle oplossingen van
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2) = 0. \end{cases}$$

geval 2 $\lambda = 0$.

Alg. oplossing van de DV $y'' + 0y = 0$: $y(x) = C_1x + C_2$.

Enige oplossing die voldoet aan $y(0) = y(2) = 0$:
(weer) $y(x) = 0$.

geval 3 $\lambda > 0$. Schrijf $\lambda = \omega^2$

Alg. oplossing van de DV $y'' + \omega^2 y = 0$:

$$y = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x).$$

Oplossingen die voldoen aan $y(0) = 0$: $y(x) = C_2 \sin(\omega x)$.

Om te voldoen aan $y(2) = 0$: $C_2 \sin(2\omega) = 0$.

Nu zijn er **wel** niet-triviale oplossingen als: $\sin(2\omega) = 0$,
dus als: $\omega = \frac{k\pi}{2}$. **Conclusie:**

$\lambda = \frac{k^2\pi^2}{4}$ geeft de oplossingen $y_k(x) = A_k \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)$.

(Een beetje goniometrie)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

(Een beetje goniometrie)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$$

(Een beetje goniometrie)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$$

(Een beetje goniometrie)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

(Een beetje goniometrie)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{Gevolgen: } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right)$$

(Een beetje goniometrie)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{Gevolgen: } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \right)$$

(Een beetje goniometrie)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{Gevolgen: } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \right)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \right)$$

(Een beetje goniometrie)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{Gevolgen: } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \right)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \right)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\alpha))$$

(Een beetje goniometrie)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{Gevolgen: } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \right)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \right)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx$$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left(\sin(mx + nx) + \sin(mx - nx) \right) dx$$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left(\sin(mx + nx) + \sin(mx - nx) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi}\end{aligned}$$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left(\sin(mx + nx) + \sin(mx - nx) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0, \text{ want } \cos((m \pm n)\pi) = \cos(-(m \pm n)\pi)\end{aligned}$$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left(\sin(mx + nx) + \sin(mx - nx) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0, \text{ want } \cos((m \pm n)\pi) = \cos(-(m \pm n)\pi) \\ &\quad \text{en er komt ook 0 uit als } m = n\end{aligned}$$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left(\sin(mx + nx) + \sin(mx - nx) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0, \text{ want } \cos((m \pm n)\pi) = \cos(-(m \pm n)\pi) \\ &\quad \text{en er komt ook 0 uit als } m = n\end{aligned}$$

Net zo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx =$$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left(\sin(mx + nx) + \sin(mx - nx) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0, \text{ want } \cos((m \pm n)\pi) = \cos(-(m \pm n)\pi) \\ &\quad \text{en er komt ook 0 uit als } m = n\end{aligned}$$

Net zo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0, & \text{als } m \neq n \end{cases}$$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left(\sin(mx + nx) + \sin(mx - nx) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0, \text{ want } \cos((m \pm n)\pi) = \cos(-(m \pm n)\pi) \\ &\quad \text{en er komt ook } 0 \text{ uit als } m = n\end{aligned}$$

Net zo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0, & \text{als } m \neq n \\ \pi, & \text{als } m = n \neq 0 \end{cases}$$

(Een paar goniometrische integralen)

Voor $m \neq n$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left(\sin(mx + nx) + \sin(mx - nx) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos((m+n)x)}{m+n} - \frac{\cos((m-n)x)}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0, \text{ want } \cos((m \pm n)\pi) = \cos(-(m \pm n)\pi) \\ &\quad \text{en er komt ook } 0 \text{ uit als } m = n\end{aligned}$$

Net zo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0, & \text{als } m \neq n \\ \pi, & \text{als } m = n \neq 0 \\ 2\pi, & \text{als } m = n = 0 \end{cases}$$

Definitie

De **Fourier reeks** van de functie $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

waarbij

Definitie

De **Fourier reeks** van de functie $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

waarbij

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

Definitie

De **Fourier reeks** van de functie $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

waarbij

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad n \geq 1$$

Definitie

De **Fourier reeks** van de functie $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

waarbij

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \quad n \geq 1$$

(Het achterliggende idee)

Opdat (mogelijkerwijs)

$$f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

op het interval $(-L, L)$,

(Het achterliggende idee)

Opdat (mogelijkerwijs)

$$f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

op het interval $(-L, L)$, zal moeten gelden

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \int_{-L}^L S(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

(Het achterliggende idee)

Opdat (mogelijkerwijs)

$$f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

op het interval $(-L, L)$, zal moeten gelden

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = \int_{-L}^L S(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

en ook

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = \int_{-L}^L S(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

(Het achterliggende idee)

We willen $f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$.

(Het achterliggende idee)

We willen $f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$.

Aangezien $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = 0$

(Het achterliggende idee)

We willen $f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$.

Aangezien $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = 0$

en $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx =$

(Het achterliggende idee)

We willen $f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$.

Aangezien $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = 0$

en $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{als } m \neq n \end{cases}$

(Het achterliggende idee)

We willen $f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$.

Aangezien $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = 0$

en $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{als } m \neq n \\ L, & \text{als } m = n \neq 0 \end{cases}$

(Het achterliggende idee)

We willen $f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$.

Aangezien $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = 0$

en $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{als } m \neq n \\ L, & \text{als } m = n \neq 0 \\ 2L, & \text{als } m = n = 0 \end{cases}$

(Het achterliggende idee)

We willen $f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$.

Aangezien $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = 0$

en $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{als } m \neq n \\ L, & \text{als } m = n \neq 0 \\ 2L, & \text{als } m = n = 0 \end{cases}$

volgt

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = \int_{-L}^L S(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = b_m \cdot L$$

(Het achterliggende idee)

We willen $f(x) = S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$.

Aangezien $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = 0$

en $\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{als } m \neq n \\ L, & \text{als } m = n \neq 0 \\ 2L, & \text{als } m = n = 0 \end{cases}$

volgt

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = \int_{-L}^L S(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = b_m \cdot L$$

En hieruit volgt direct de formule voor b_m .

Voorbeeld (simpeler kan het haast niet)

Bereken de fourierreeks van de functie f , periodiek met periode 2π

Voorbeeld (simpeler kan het haast niet)

Bereken de fourierreeks van de functie f , periodiek met periode 2π

met $f(x) = 1$, als $0 \leq x \leq \pi$,

Voorbeeld (simpeler kan het haast niet)

Bereken de fourierreeks van de functie f , periodiek met periode 2π

met $f(x) = 1$, als $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) = 0$, als $\pi < x < 2\pi$.

Voorbeeld (simpeler kan het haast niet)

Bereken de fourierreeks van de functie f , periodiek met periode 2π

met $f(x) = 1$, als $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) = 0$, als $\pi < x < 2\pi$.

Voorbeeld (B & dP 10.2 20)

Bereken de fourierreeks van de functie f , periodiek met periode 2

Voorbeeld (simpeler kan het haast niet)

Bereken de fourierreeks van de functie f , periodiek met periode 2π

met $f(x) = 1$, als $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) = 0$, als $\pi < x < 2\pi$.

Voorbeeld (B & dP 10.2 20)

Bereken de fourierreeks van de functie f , periodiek met periode 2

met $f(x) = x$, als $-1 \leq x \leq 1$.

Stelling

Stel $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn **stuksgewijs continu**.

Stelling

Stel $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn **stuksgewijs continu**.

Stel

$$s_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

is de N -de partiële som van de Fourier reeks van f .

Stelling

Stel $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn **stuksgewijs continu**.

Stel

$$s_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

is de N -de partiële som van de Fourier reeks van f .

In punten x_0 waar f continu is geldt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x_0) = f(x_0).$$

Stelling

Stel $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn **stuksgewijs continu**.

Stel

$$s_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

is de N -de partiële som van de Fourier reeks van f .

In punten x_0 waar f continu is geldt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x_0) = f(x_0).$$

In punten x_0 waar f niet continu is geldt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$$

Stelling

Stel $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn **stuksgewijs continu**.

Stel

$$s_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

is de N -de partiële som van de Fourier reeks van f .

In punten x_0 waar f continu is geldt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x_0) = f(x_0).$$

In punten x_0 waar f niet continu is geldt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} = \frac{\lim_{x \downarrow x_0} f(x) + \lim_{x \uparrow x_0} f(x)}{2}$$

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$ (en f' is stuksgewijs continu), en periodiek met periode $2L$,

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$ (en f' is stuksgewijs continu), en periodiek met periode $2L$, dan $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x)$ overal,

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$ (en f' is stuksgewijs continu), en periodiek met periode $2L$, dan $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x)$ overal,

behalve eventueel in de eindpunten $\pm L$.

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$ (en f' is stuksgewijs continu), en periodiek met periode $2L$, dan $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x)$ overal,

behalve eventueel in de eindpunten $\pm L$.

Als ook nog $f(L+) = f(L-)$,

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$ (en f' is stuksgewijs continu), en periodiek met periode $2L$, dan $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x)$ overal,

behalve eventueel in de eindpunten $\pm L$.

Als ook nog $f(L+) = f(L-)$, dan ook $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x)$ voor $x = L \pmod{2L}$.

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$ (en f' is stuksgewijs continu), en periodiek met periode $2L$, dan $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x)$ overal,

behalve eventueel in de eindpunten $\pm L$.

Als ook nog $f(L+) = f(L-)$, dan ook $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x)$ voor $x = L \pmod{2L}$.

Voorbeeld

- Opgave 10.2 20. $f(x) = x$, $-1 \leq x \leq 1$.

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$ (en f' is stuksgewijs continu), en periodiek met periode $2L$, dan $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x)$ overal,

behalve eventueel in de eindpunten $\pm L$.

Als ook nog $f(L+) = f(L-)$, dan ook $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x)$ voor $x = L \pmod{2L}$.

Voorbeeld

- Opgave 10.2 20. $f(x) = x$, $-1 \leq x \leq 1$.

Hier geen 'aansluiting in de eindpunten'.

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$ (en f' is stuksgewijs continu), en periodiek met periode $2L$, dan $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x)$ overal,

behalve eventueel in de eindpunten $\pm L$.

Als ook nog $f(L+) = f(L-)$, dan ook $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x)$ voor $x = L \pmod{2L}$.

Voorbeeld

- Opgave 10.2 20. $f(x) = x$, $-1 \leq x \leq 1$.
Hier geen 'aansluiting in de eindpunten'.
- Opgave 10.2 21. $f(x) = x^2/2$, $-2 \leq x \leq 2$.

Opmerking

Als f continu is op $[-L, L)$ (en f' is stuksgewijs continu), en periodiek met periode $2L$, dan $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x)$ overal,

behalve eventueel in de eindpunten $\pm L$.

Als ook nog $f(L+) = f(L-)$, dan ook $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x)$ voor $x = L \pmod{2L}$.

Voorbeeld

- Opgave 10.2 20. $f(x) = x$, $-1 \leq x \leq 1$.
Hier geen 'aansluiting in de eindpunten'.
- Opgave 10.2 21. $f(x) = x^2/2$, $-2 \leq x \leq 2$.
Hier wel 'aansluiting in de eindpunten'.

(Andere) convergentiestelling over Fourier reeksen

Stelling

Stel $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn **stuksgewijs continu**.

(Andere) convergentiestelling over Fourier reeksen

Stelling

Stel $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn **stuksgewijs continu**.

Stel

$$s_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

is de N -de partiële som van de Fourier reeks van f .

(Andere) convergentiestelling over Fourier reeksen

Stelling

Stel $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn **stuksgewijs continu**.

Stel

$$s_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

is de N -de partiële som van de Fourier reeks van f .

Er geldt:

$$\int_{-L}^L |f(x) - s_N(x)| dx \rightarrow 0, \quad \text{als } n \rightarrow \infty$$

(Andere) convergentiestelling over Fourier reeksen

Stelling

Stel $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$, en zijn afgeleide f' zijn **stuksgewijs continu**.

Stel

$$s_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

is de N -de partiële som van de Fourier reeks van f .

Er geldt:

$$\int_{-L}^L |f(x) - s_N(x)| dx \rightarrow 0, \quad \text{als } n \rightarrow \infty$$

De partiële sommen s_N van de Fourier reeks van f naderen dus een soort van 'uniform' naar f .