Existentiestelling voor de eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (2.8.1)

Gegeven de DV met beginvoorwaarde

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \qquad \text{(BVP)}$$

Existentiestelling voor de eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (2.8.1)

Gegeven de DV met beginvoorwaarde

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \qquad \text{(BVP)}$$

Stel f en $\partial f / \partial y$ zijn continu op een omgeving van het punt (t_0, y_0),

Existentiestelling voor de eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (2.8.1)

Gegeven de DV met beginvoorwaarde

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \qquad \text{(BVP)}$$

Stel f en $\partial f / \partial y$ zijn continu op een omgeving van het punt (t_0, y_0), zeg op de rechthoek $|y - y_0| \leq h_1, \ |t - t_0| \leq h_2$.

Existentiestelling voor de eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (2.8.1)

Gegeven de DV met beginvoorwaarde

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \qquad \text{(BVP)}$$

Stel f en $\partial f / \partial y$ zijn continu op een omgeving van het punt (t_0, y_0), zeg op de rechthoek $|y - y_0| \leq h_1, \ |t - t_0| \leq h_2$.

Dan is er een $h > 0$ zodat het beginwaardeprobleem (BVP) op het interval $(t_0 - h, \ t_0 + h)$ een <u>unieke</u> oplossing heeft.

Existentiestelling voor de eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (2.8.1)

Gegeven de DV met beginvoorwaarde

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \qquad \text{(BVP)}$$

Stel f en $\partial f / \partial y$ zijn continu op een omgeving van het punt (t_0, y_0), zeg op de rechthoek $|y - y_0| \leq h_1$, $|t - t_0| \leq h_2$.

Dan is er een $h > 0$ zodat het beginwaardeprobleem (BVP) op het interval $(t_0 - h,\ t_0 + h)$ een <u>unieke</u> oplossing heeft.

Voorbeeld

$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$ heeft de oplossing $y = y(t) =$

Existentiestelling voor de eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (2.8.1)

Gegeven de DV met beginvoorwaarde

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \qquad \text{(BVP)}$$

Stel f en $\partial f / \partial y$ zijn continu op een omgeving van het punt (t_0, y_0), zeg op de rechthoek $|y - y_0| \leq h_1, \ |t - t_0| \leq h_2$.

Dan is er een $h > 0$ zodat het beginwaardeprobleem (BVP) op het interval $(t_0 - h, \ t_0 + h)$ een <u>unieke</u> oplossing heeft.

Voorbeeld

$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$ heeft de oplossing $y = y(t) = \tan t$.

Existentiestelling voor de eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (2.8.1)

Gegeven de DV met beginvoorwaarde

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \qquad \text{(BVP)}$$

Stel f en $\partial f/\partial y$ zijn continu op een omgeving van het punt (t_0, y_0), zeg op de rechthoek $|y - y_0| \leq h_1$, $|t - t_0| \leq h_2$.

Dan is er een $h > 0$ zodat het beginwaardeprobleem (BVP) op het interval $(t_0 - h,\ t_0 + h)$ een unieke oplossing heeft.

Voorbeeld

$y' = 1 + y^2$, $\quad y(0) = 0$ heeft de oplossing $y = y(t) = \tan t$.

Deze oplossing is geldig op het interval

Existentiestelling voor de eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (2.8.1)

Gegeven de DV met beginvoorwaarde

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \qquad \text{(BVP)}$$

Stel f en $\partial f/\partial y$ zijn continu op een omgeving van het punt (t_0, y_0), zeg op de rechthoek $|y - y_0| \leq h_1, \ |t - t_0| \leq h_2$.

Dan is er een $h > 0$ zodat het beginwaardeprobleem (BVP) op het interval $(t_0 - h, \ t_0 + h)$ een unieke oplossing heeft.

Voorbeeld

$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$ heeft de oplossing $y = y(t) = \tan t$.

Deze oplossing is geldig op het interval $\left(-\frac{1}{2}\pi, \ \frac{1}{2}\pi\right)$.

(het standaardvoorbeeld met *niet* een unieke oplossing)

$$y'(t) = f(t, y) = 3y^{2/3} = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

(het standaardvoorbeeld met *niet* een unieke oplossing)

$$y'(t) = f(t, y) = 3y^{2/3} = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

Twee *verschillende* oplossingen (op *elk* interval $(-h, h)$!):

$$y_1(t) = 0,$$

(het standaardvoorbeeld met *niet* een unieke oplossing)

$$y'(t) = f(t, y) = 3y^{2/3} = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

Twee *verschillende* oplossingen (op *elk* interval $(-h, h)$!):

$$y_1(t) = 0, \qquad y_2(t) = t^3$$

(het standaardvoorbeeld met *niet* een unieke oplossing)

$$y'(t) = f(t, y) = 3y^{2/3} = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

Twee *verschillende* oplossingen (op *elk* interval $(-h, h)$!):

$$y_1(t) = 0, \qquad y_2(t) = t^3$$

Merk op $\partial f/\partial y = 2y^{-1/3} = 2/\sqrt[3]{y}$

(het standaardvoorbeeld met *niet* een unieke oplossing)

$$y'(t) = f(t,y) = 3y^{2/3} = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

Twee *verschillende* oplossingen (op *elk* interval $(-h,h)$!):

$$y_1(t) = 0, \qquad y_2(t) = t^3$$

Merk op $\partial f/\partial y = 2y^{-1/3} = 2/\sqrt[3]{y}$ is niet continu in 0.

Definitie

Een lineaire differentiaalvergelijking van de orde n:

$$a_n(t)y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t)=g(t).$$

Definitie

Een lineaire differentiaalvergelijking van de orde n:

$$a_n(t)y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t)=g(t).$$

De bijbehorende homogene (of: gereduceerde) vergelijking:

$$a_n(t)y^{(n)}(t)+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1(t)y'(t)+a_0(t)y(t)=0.$$

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling

Neem aan dat de functies $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t)$ en $g(t)$ in de LDV continu zijn.

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling

Neem aan dat de functies $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t)$ en $g(t)$ in de LDV continu zijn.

- Elke n-de orde homogene lineaire DV heeft precies n onafhankelijke oplossingen $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\ldots\ldots$, $y_n(t)$,

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling

Neem aan dat de functies $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t)$ en $g(t)$ in de LDV continu zijn.

- Elke n-de orde homogene lineaire DV heeft precies n onafhankelijke oplossingen $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\ldots\ldots$, $y_n(t)$,

  en de algemene oplossing is van de vorm

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots\ldots + c_n y_n \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling

Neem aan dat de functies $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t)$ en $g(t)$ in de LDV continu zijn.

- Elke n-de orde homogene lineaire DV heeft precies n onafhankelijke oplossingen $y_1(t), y_2(t), \ldots\ldots, y_n(t)$,

  en de algemene oplossing is van de vorm

  $$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots\ldots + c_n y_n \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

- De algemene oplossing van een lineaire DV is van de vorm

  $$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots\ldots + c_n y_n.$$

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling

Neem aan dat de functies $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t)$ en $g(t)$ in de LDV continu zijn.

- Elke n-de orde homogene lineaire DV heeft precies n onafhankelijke oplossingen $y_1(t),\ y_2(t),\ \ldots\ldots,\ y_n(t)$,

  en de algemene oplossing is van de vorm

  $$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots\ldots + c_n y_n \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

- De algemene oplossing van een lineaire DV is van de vorm

  $$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots\ldots + c_n y_n.$$

  Hierbij is y_p een (particuliere) oplossing van de DV,

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling

Neem aan dat de functies $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t)$ en $g(t)$ in de LDV continu zijn.

- Elke n-de orde homogene lineaire DV heeft precies n onafhankelijke oplossingen $y_1(t),\ y_2(t),\ \ldots\ldots,\ y_n(t)$,

  en de algemene oplossing is van de vorm

  $$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots\ldots + c_n y_n \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

- De algemene oplossing van een lineaire DV is van de vorm

  $$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots\ldots + c_n y_n.$$

  Hierbij is y_p een (particuliere) oplossing van de DV,
  en zijn $y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_n$ oplossingen van de bijbehorende gereduceerde vergelijking.

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling (derde deel)

- Er is precies één oplossing bij de 'beginvoorwaarden':

$$y(t_0) = p_0, \quad y'(t_0) = p_1, \quad \ldots\ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = p_{n-1}$$

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling (derde deel)

- Er is precies één oplossing bij de 'beginvoorwaarden':

$$y(t_0) = p_0, \quad y'(t_0) = p_1, \quad \ldots\ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = p_{n-1}$$

Bovendien is deze oplossing gedefinieerd op het hele interval (α, β) rond t_0 waarop de functies $a_i(t)$ en $g(t)$ continu zijn.

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling (derde deel)

- Er is precies één oplossing bij de 'beginvoorwaarden':

$$y(t_0) = p_0, \quad y'(t_0) = p_1, \quad \ldots\ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = p_{n-1}$$

Bovendien is deze oplossing gedefinieerd op het hele interval (α, β) rond t_0 waarop de functies $a_i(t)$ en $g(t)$ continu zijn.

Voorbeeld

De oplossing van $y' = 2ty, \; y(0) = 1$:

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling (derde deel)

- Er is precies één oplossing bij de 'beginvoorwaarden':

$$y(t_0) = p_0, \quad y'(t_0) = p_1, \quad \ldots\ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = p_{n-1}$$

Bovendien is deze oplossing gedefinieerd op het hele interval (α, β) rond t_0 waarop de functies $a_i(t)$ en $g(t)$ continu zijn.

Voorbeeld

De oplossing van $y' = 2ty$, $y(0) = 1$: $\quad y(t) = e^{t^2}$.

Existentiestelling voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Stelling (derde deel)

- Er is precies één oplossing bij de 'beginvoorwaarden':

$$y(t_0) = p_0, \quad y'(t_0) = p_1, \quad \ldots\ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = p_{n-1}$$

Bovendien is deze oplossing gedefinieerd op het hele interval (α, β) rond t_0 waarop de functies $a_i(t)$ en $g(t)$ continu zijn.

Voorbeeld

De oplossing van $y' = 2ty$, $y(0) = 1$: $\quad y(t) = e^{t^2}$.

De oplossing geldt op het hele domein $-\infty < t < \infty$.

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

We bekijken het stelsel 1ste orde DV's

$$\begin{cases} x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ & \vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

We bekijken het stelsel 1ste orde DV's

$$\begin{cases} x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Gebruikelijke 'beginvoorwaarden':

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

We bekijken het stelsel 1ste orde DV's

$$\begin{cases} x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Gebruikelijke 'beginvoorwaarden':

$$x_1(t_0) = x_1^0, \;\; x_2(t_0) = x_2^0, \;\; \ldots \;\; x_n(t_0) = x_n^0.$$

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

We bekijken het stelsel 1ste orde DV's

$$\begin{cases} x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Gebruikelijke 'beginvoorwaarden':

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ \ x_2(t_0) = x_2^0,\ \ \ldots\ \ x_n(t_0) = x_n^0.$$

Afgekort: $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}),\ \ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0.$

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (7.1.1)

Neem aan dat de functies $F_1, F_2, \ldots, F_n$ en alle partiële afgeleiden $\partial F_i / \partial x_j$ continu zijn in een omgeving van het punt $(t_0, \mathbf{x}^0)$

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (7.1.1)

Neem aan dat de functies $F_1, F_2, \ldots, F_n$ en alle partiële afgeleiden $\partial F_i / \partial x_j$ continu zijn in een omgeving van het punt $(t_0, \mathbf{x}^0)$ (dit punt ligt in $\mathbb{R}^{n+1}$).

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (7.1.1)

Neem aan dat de functies $F_1, F_2, \ldots, F_n$ en alle partiële afgeleiden $\partial F_i/\partial x_j$ continu zijn in een omgeving van het punt $(t_0, \mathbf{x}^0)$ (dit punt ligt in $\mathbb{R}^{n+1}$).

Dan heeft het beginwaardeprobleem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \;\; \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

op een zeker interval $(t_0 - h, t_0 + h)$ een *unieke* oplossing.

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (7.1.1)

Neem aan dat de functies $F_1, F_2, \ldots, F_n$ en alle partiële afgeleiden $\partial F_i / \partial x_j$ continu zijn in een omgeving van het punt $(t_0, \mathbf{x}^0)$ (dit punt ligt in $\mathbb{R}^{n+1}$).

Dan heeft het beginwaardeprobleem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \;\; \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

op een zeker interval $(t_0 - h, t_0 + h)$ een *unieke* oplossing.

Dus:

Existentiestelling voor stelsels eerste orde differentiaalvergelijkingen

Stelling (7.1.1)

Neem aan dat de functies $F_1, F_2, \ldots, F_n$ en alle partiële afgeleiden $\partial F_i / \partial x_j$ continu zijn in een omgeving van het punt $(t_0, \mathbf{x}^0)$ (dit punt ligt in $\mathbb{R}^{n+1}$).

Dan heeft het beginwaardeprobleem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \;\; \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

op een zeker interval $(t_0 - h, t_0 + h)$ een *unieke* oplossing.

Dus: er zijn **unieke** functies $x_1 = \phi_1(t), x_2 = \phi_2(t), \ldots,$
$\ldots, \; x_n = \phi_n(t)$ die tesamen aan zowel het stelsel differentiaalvergelijkingen als aan de beginwaarden voldoen.

Stelsels eerste orde lineaire DV's

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1' & = & p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \ldots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' & = & p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \ldots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ & \vdots & \\ x_2' & = & p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \ldots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{array}\right.$$

Stelsels eerste orde lineaire DV's

$$\begin{cases} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \ldots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \ldots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ x_2' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \ldots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}$$

Afgekort:

Stelsels eerste orde lineaire DV's

$$\begin{cases} x_1' & = & p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \ldots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' & = & p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \ldots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ & \vdots & \\ x_2' & = & p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \ldots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}$$

Afgekort:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t),$$

Stelsels eerste orde lineaire DV's

$$\begin{cases} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \ldots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \ldots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ x_2' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \ldots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}$$

Afgekort:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}t) & \ldots & \ldots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}t) & \ldots & \ldots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}t) & \ldots & \ldots & p_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Existentiestelling voor stelsels lineaire DV's

Stelling (7.1.2)

Neem aan dat de functies $p_{ij}(t)$, $g_i(t)$ continu zijn in op een interval (α, β) rond het punt t_0.

Existentiestelling voor stelsels lineaire DV's

Stelling (7.1.2)

Neem aan dat de functies $p_{ij}(t)$, $g_i(t)$ continu zijn in op een interval (α, β) rond het punt t_0.

Dan heeft het beginwaardeprobleem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \;\; \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

Existentiestelling voor stelsels lineaire DV's

Stelling (7.1.2)

Neem aan dat de functies $p_{ij}(t)$, $g_i(t)$ continu zijn in op een interval (α, β) rond het punt t_0.

Dan heeft het beginwaardeprobleem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \;\; \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

een **unieke** oplossing op

Existentiestelling voor stelsels lineaire DV's

Stelling (7.1.2)

Neem aan dat de functies $p_{ij}(t)$, $g_i(t)$ continu zijn in op een interval (α, β) rond het punt t_0.

Dan heeft het beginwaardeprobleem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \;\; \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

een **unieke** oplossing op het **hele** interval (α, β).

Existentiestelling voor stelsels lineaire DV's

Stelling (7.1.2)

Neem aan dat de functies $p_{ij}(t)$, $g_i(t)$ continu zijn in op een interval (α, β) rond het punt t_0.

Dan heeft het beginwaardeprobleem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

een **unieke** oplossing op het **hele** interval (α, β).

Gevolg

Het (homogene) stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ heeft precies n onafhankelijke oplossingen $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$,

Existentiestelling voor stelsels lineaire DV's

Stelling (7.1.2)

Neem aan dat de functies $p_{ij}(t)$, $g_i(t)$ continu zijn in op een interval (α, β) rond het punt t_0.

Dan heeft het beginwaardeprobleem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

een **unieke** oplossing op het **hele** interval (α, β).

Gevolg

Het (homogene) stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ heeft precies n onafhankelijke oplossingen $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$, en als algemene oplossing

$$\mathbf{x}(t) = c_1\,\mathbf{x}_1(t) + c_2\,\mathbf{x}_2(t) + \ldots + c_n\mathbf{x}_n(t)$$

Definitie

Een set $\{\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)\}$ van onafhankelijke oplossingen van $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ wordt wel een fundamental set of solutions genoemd.

Definitie

Een set $\{\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)\}$ van onafhankelijke oplossingen van $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ wordt wel een fundamental set of solutions genoemd.

De algemene oplossing kan dan geschreven worden als

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) & \ldots & \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix} \mathbf{c}$$

Definitie

Een set $\{\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)\}$ van onafhankelijke oplossingen van $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ wordt wel een fundamental set of solutions genoemd.

De algemene oplossing kan dan geschreven worden als
$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) & \ldots & \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix} \mathbf{c} = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{c}.$

Definitie

Een set $\{\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)\}$ van onafhankelijke oplossingen van $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ wordt wel een fundamental set of solutions genoemd.

De algemene oplossing kan dan geschreven worden als
$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) & \ldots & \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix} \mathbf{c} = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{c}$.

Opmerking

Een speciale set fundamentale oplossingen wordt gegeven door de oplossingen $\mathbf{u}_k(t)$ van het stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$ die voldoen aan
$$x(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{als } i = k \\ 0, & \text{als } i \neq k \end{cases}$$

Definitie

Een set $\{\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)\}$ van onafhankelijke oplossingen van $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ wordt wel een fundamental set of solutions genoemd.

De algemene oplossing kan dan geschreven worden als
$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) & \ldots & \mathbf{x}_n(t)\end{bmatrix} \mathbf{c} = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{c}$.

Opmerking

Een speciale set fundamentale oplossingen wordt gegeven door de oplossingen $\mathbf{u}_k(t)$ van het stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$ die voldoen aan
$x(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{als } i = k \\ 0, & \text{als } i \neq k \end{cases}$
De oplossing die voldoet aan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}$ wordt dan simpelweg

Definitie

Een set $\{\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)\}$ van onafhankelijke oplossingen van $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ wordt wel een fundamental set of solutions genoemd.

De algemene oplossing kan dan geschreven worden als

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) & \ldots & \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix} \mathbf{c} = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{c}.$$

Opmerking

Een speciale set fundamentale oplossingen wordt gegeven door de oplossingen $\mathbf{u}_k(t)$ van het stelsel $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$ die voldoen aan

$$x(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{als } i = k \\ 0, & \text{als } i \neq k \end{cases}$$

De oplossing die voldoet aan $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}$ wordt dan simpelweg

$$\mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) & \mathbf{u}_2(t) & \ldots & \mathbf{u}_n(t) \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{U}(t)\,\mathbf{x}^{(0)}.$$

Eenvoudigste lineaire stelsel: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, met A diagonaliseerbaar

Een diagonaliseerbare matrix A heeft n onafhankelijke eigenvectoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ bij eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Eenvoudigste lineaire stelsel: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, met A diagonaliseerbaar

Een diagonaliseerbare matrix A heeft n onafhankelijke eigenvectoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ bij eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Dat geeft voor het stelsel $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ precies n onafhankelijke oplossingen $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}$,

Eenvoudigste lineaire stelsel: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, met A diagonaliseerbaar

Een diagonaliseerbare matrix A heeft n onafhankelijke eigenvectoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ bij eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Dat geeft voor het stelsel $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ precies n onafhankelijke oplossingen $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}$,

en dus de algemene oplossing

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_n\mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

Eenvoudigste lineaire stelsel: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, met A diagonaliseerbaar

Een diagonaliseerbare matrix A heeft n onafhankelijke eigenvectoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ bij eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Dat geeft voor het stelsel $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ precies n onafhankelijke oplossingen $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}$,

en dus de algemene oplossing

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_n\mathbf{v}_n e^{\lambda_n t} \\ &= \begin{bmatrix} \| & \| & & \| \\ \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} & \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} & \ldots & \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t} \\ \| & \| & & \| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Voorbeeld

Bekijk het stelsel $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1' & = & x_1 & - & 2x_2 & + & 4e^t \\ x_2' & = & 3x_1 & - & 4x_2 & + & e^t \end{array} \right.$,

kortweg $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4e^t \\ e^t \end{bmatrix}$.

Voorbeeld

Bekijk het stelsel $\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1' & = & x_1 & - & 2x_2 & + & 4e^t \\ x_2' & = & 3x_1 & - & 4x_2 & + & e^t \end{array}\right.$,

kortweg $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4e^t \\ e^t \end{bmatrix}$.

- Bereken twee (onafhankelijke) oplossingen van de vorm $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{rt}$ van het homogene stelsel $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.
- Geef de algemene oplossing van het homogene stelsel.
- Bereken de oplossingen die voldoen aan de beginwaarden $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ resp. $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Zoek een particuliere oplossing van het inhomogene stelsel in de vorm $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{w}e^t$.

Voorbeeld

Bekijk het stelsel $\begin{cases} x_1' &= x_1 - 2x_2 + 4e^t \\ x_2' &= 3x_1 - 4x_2 + e^t \end{cases}$,

kortweg $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4e^t \\ e^t \end{bmatrix}$.

- Bereken twee (onafhankelijke) oplossingen van de vorm $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{rt}$ van het homogene stelsel $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.
- Geef de algemene oplossing van het homogene stelsel.
- Bereken de oplossingen die voldoen aan de beginwaarden $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ resp. $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Zoek een particuliere oplossing van het inhomogene stelsel in de vorm $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{w}e^t$.
- De matrix A is diagonaliseerbaar: $A = PDP^{-1}$
  Substitueer $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, and see what happens ....

Strange but possible: $e^{A\,t}$

Opmerking

Gezien: de oplossingen $\mathbf{u}_k(t)$ van het stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ die voldoen aan $x_i(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{als } i = k \\ 0, & \text{als } i \neq k \end{cases}$

geven de fundamentaalmatrix $\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) & \mathbf{u}_2(t) & \dots & \mathbf{u}_n(t) \end{bmatrix}$

Strange but possible: $e^{A\,t}$

Opmerking

Gezien: de oplossingen $\mathbf{u}_k(t)$ van het stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ die voldoen aan $x_i(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{als } i = k \\ 0, & \text{als } i \neq k \end{cases}$

geven de fundamentaalmatrix $\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) & \mathbf{u}_2(t) & \dots & \mathbf{u}_n(t) \end{bmatrix}$

Eigenschappen van $\mathbf{F}$: $\mathbf{F}'(t) = A\,\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{F}(0) = I$.

Strange but possible: $e^{A\,t}$

Opmerking

Gezien: de oplossingen $\mathbf{u}_k(t)$ van het stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ die voldoen aan $x_i(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{als } i = k \\ 0, & \text{als } i \neq k \end{cases}$

geven de fundamentaalmatrix $\mathbf{F}(t) = \left[\mathbf{u}_1(t)\ \mathbf{u}_2(t)\ \dots\ \mathbf{u}_n(t)\right]$

Eigenschappen van $\mathbf{F}$: $\mathbf{F}'(t) = A\,\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{F}(0) = I$.

In feite geldt

$$\mathbf{F}(t) = e^{A\,t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = I + A\,t + \tfrac{1}{2!}A^2\,t^2 + \tfrac{1}{3!}A^3\,t^3 + \dots$$

Strange but possible: $e^{A\,t}$

Opmerking

Gezien: de oplossingen $\mathbf{u}_k(t)$ van het stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ die voldoen aan $x_i(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{als } i = k \\ 0, & \text{als } i \neq k \end{cases}$
geven de fundamentaalmatrix $\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) & \mathbf{u}_2(t) & \ldots & \mathbf{u}_n(t) \end{bmatrix}$

Eigenschappen van $\mathbf{F}$: $\mathbf{F}'(t) = A\,\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{F}(0) = I$.

In feite geldt

$$\mathbf{F}(t) = e^{A\,t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = I + A\,t + \tfrac{1}{2!}A^2\,t^2 + \tfrac{1}{3!}A^3\,t^3 + \ldots$$

Maple kan e^A, $e^{A\,t}$ berekenen: `MatrixExponential`.