# Convolutie

September 13, 2013

Delft University of Technology

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)]\cdot\mathcal{L}[g(t)] &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \cdot \int_0^\infty g(u)e^{-su}\,du \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(t)g(u)e^{-st}e^{-su}\,d(u,t) \\
&= \int_0^\infty f(t)\left[\int_0^\infty g(u)e^{-s(t+u)}\,du\right]dt \\
&\qquad \text{stel } z = u+t \quad \text{(in binnenste integraal)} \\
&= \int_0^\infty f(t)\left[\int_{z=t}^\infty g(z-t)e^{-sz}\,dz\right]dt \\
&\qquad \text{(integratievolgorde verwisselen)} \\
&= \int_{z=0}^\infty \left[\int_{t=0}^z f(t)g(z-t)e^{-sz}\,dt\right]dz \\
&= \int_{z=0}^\infty \left[\int_{t=0}^z f(t)g(z-t)\,dt\right]e^{-sz}\,dz
\end{aligned}
$$

TU Delft
Delft University of Technology

## Definitie

De convolutie $f * g$ van $f$ en $g$, voor functies van $[0, \infty)$ naar $\mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

## Voorbeeld

Voor $f(t) = t$, $g(t) = e^t$

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_0^t \tau e^{(t-\tau)}\,d\tau = e^t \int_0^t \tau e^{-\tau}\,d\tau \\ &= \ldots = e^t \left[-\tau e^{-\tau} - e^{-\tau}\right]_0^t \\ &= e^t \left[-te^{-t} - e^{-t} + 1\right] = e^t - t - 1\end{aligned}$$

## Stelling (Rekenregels van de convolutie)

1. $f * g = g * f$ (symmetrie)
2. $f * (g * h) = (f * g) * h$ (associativiteit)
3. $f * 0 = 0$
4. $f * (c_1 g + c_2 h) = c_1 f * g + c_2 f * h$ (lineariteit)

## Opmerking

N.B. $(f * 1) \neq f$! (hoe zit dit dan?)

## Stelling

Als de Laplace-getransformeerden van $f(t)$ en $g(t)$ gelijk zijn aan $F(s)$ resp. $G(s)$, dan geldt

$$\mathcal{L}[f * g] = F(s)\, G(s)$$

Vooral de **omkering** is belangrijk bij het oplossen van diff vgln.!

## Voorbeeld

Gevraagd: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right]$.

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1 \quad \text{en} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] = 1 * \sin t = \int_0^t \sin\tau \, d\tau = \ldots = 1 - \cos t$$

Delft University of Technology

## Voorbeeld

Los op: $y'' + y = \sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0$

'Laplace transformeren' geeft

$$s^2 Y(s) + Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \iff Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

Bij het terugtransformeren de 'convolutieregel' gebruiken:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] \\ = (\sin t) * (\sin t) &= \int_0^t \sin(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^t \sin\tau\big(\sin t\,\cos\tau - \cos t\sin\tau\big)\,d\tau \end{aligned}$$

## Voorbeeld (vervolg)

Los op: $y'' + y = \sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0$

Gevonden: $$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

Bij het terugtransformeren de 'convolutieregel' gebruiken:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1}\right] = (\sin t) * (\sin t) =$$

$$= \ldots = \sin t \int_0^t \sin\tau \cos\tau \, d\tau - \cos t \int_0^t \sin^2\tau \, d\tau$$

$$= \ldots\ldots = \sin t \cdot \tfrac{1}{2}\sin^2 t - \cos t \cdot \left(\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4}\sin(2t)\right)$$

$$= \ldots\ldots = \tfrac{1}{2}\sin t - \tfrac{1}{2}t \cos t.$$