Niet-lineaire autonome stelsels

October 9, 2014

Voorbeeld

$$\begin{cases} x' &= (2+x)(x-y) \\ y' &= (1-y)(x+y) \end{cases}$$

De rustpunten: $(2+x)(x-y)=0$ voor $x=-2$ of $x=y$.
$x=2$ invullen in de 2de vgl geeft $y=1$ of $y=-2$;
$x=y$ invullen in de 2de vgl geeft $y=1$ of $y=-x=0$.
Alle mogelijke combianties: (0,0), (1,1), $(-2,\ 2)$ en $(-2,\ 2)$.

De Jacobiaan:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2x-y & 2+x \\ 1-y & 1-x-2y \end{bmatrix}$$

geeft achtereenvolgens

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad J(1,1) = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$J(-2,1) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J(-2,2) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

vervolg voorbeeld

Voorbeeld

$$J(0,0)=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad J(1,1)=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 0 & -2\end{bmatrix},$$

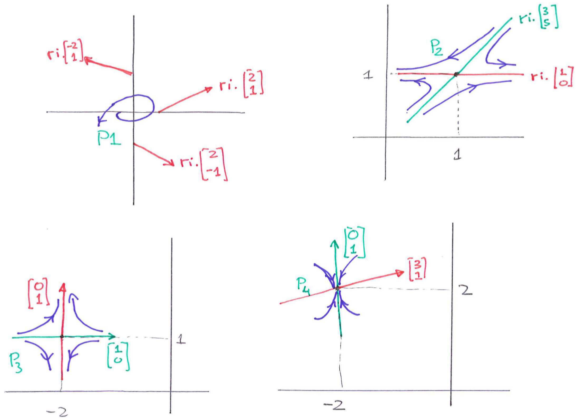
$$J(-2,1)=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad J(-2,2)=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}.$$ Deze matrices hebben de eigenwaarden/eigenvectoren

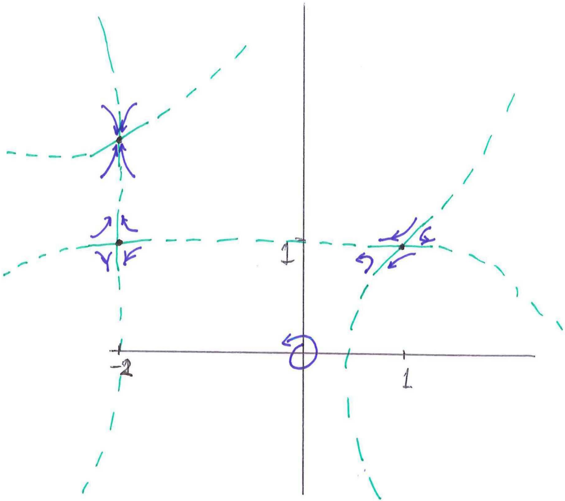
$$\lambda_{1,2}=\tfrac{3}{2}\pm i\tfrac{1}{2}\sqrt{7}$$

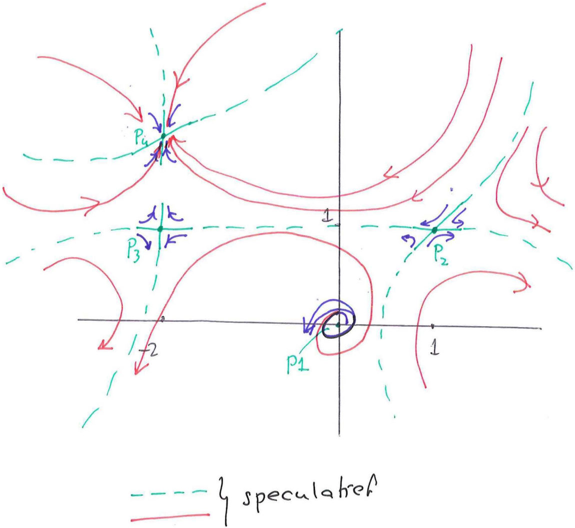
$$\lambda_1=3,\ \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ \lambda_2=-2,\ \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=1,\ \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ \lambda_2=-3,\ \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1=-4,\ \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},\ \lambda_2=-1,\ \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

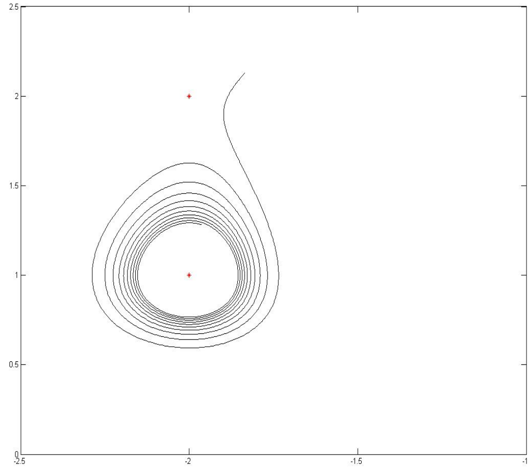

ri. $\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$
ri. $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$
P1
ri. $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$
ri. $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$
P_2
1
ri. $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
1
$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
P_3
$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
1
-2
$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
P_4
$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$
2
-2


1
-2
1



P4
P3
P2
P1
1
-2
1
speculatief

Gedrag rond het rustpunt $(-2, 1)$



Op grond van het plaatje is niet echt goed te zien of $(-2, 1)$ een centrum of een (stabiel?) spiraalpunt is.

Voorbeeld

$$\begin{cases} x' &= (1-y)(x+y) \\ y' &= (2+x)(x-y) \end{cases}$$

De rustpunten zijn (weer): (0,0), (1,1), $(-2, 2)$ en $(-2, 2)$.

De Jacobiaan:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-y & 1-x-2y \\ 2+2x-y & 2+x \end{bmatrix}$$

geeft achtereenvolgens

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad J(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix},$$

$$J(-2,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad J(-2,2) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deze matrices hebben de eigenwaarden

$$\lambda_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{17}, \qquad \lambda_{1,2} = -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2} i\sqrt{15},$$
$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}, \qquad \text{resp. } \lambda_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{17}$$

Voorbeeld

Uit de eigenwaarden lezen we af: voor de linearisering geldt:

in (0,0):	een zadelpunt;	in (1,1):	(stabiel) spiraalpunt;
(−2,1):	een centrum;	(−2,2):	een zadelpunt;

Drie van de vier rustpunten van het niet-lineaire stelsel vertonen hetzelfde kwalitatieve gedrag, alleen in het punt (−2,1) is het gedrag nog niet eenduidig: spiraalpunt (stabiel of instabiel) of centrum.

De eigenvectoren liggen een stuk rottiger dan in de eerdere opgave (eigenlijk: niet te doen!).

Wel kun je nagaan dat in het punt (1,1) de draairichting linksom is:

$$\mathbf{F}(1, 1+\varepsilon) = \begin{bmatrix} -\varepsilon(2+\varepsilon) \\ (3+\varepsilon)\cdot(-\varepsilon) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -2\varepsilon \\ -3\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \text{of:}$$

$J(1,1)\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\varepsilon \\ -3\varepsilon \end{bmatrix}$. De draairichting is: linksom.

Voorbeeld (toch 'even' de eigenvectoren)

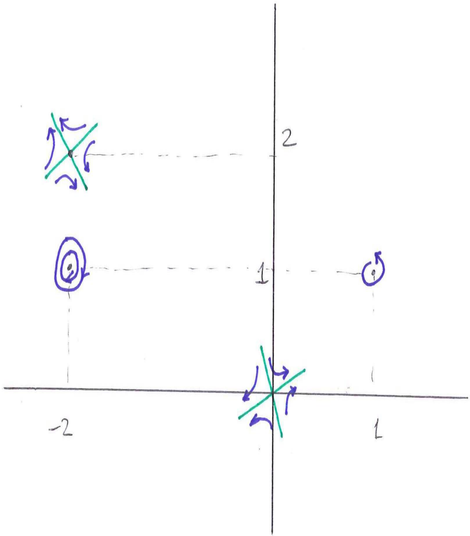
Bij $J(-2,2)$: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{17} \approx -\frac{1}{2} \pm 2$

E.v. bij $\lambda_1 \approx \frac{3}{2}$: $\mathbf{v}_1 \approx \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ ('weglooprichting').

E.v. bij $\lambda_1 \approx -\frac{5}{2}$: $\mathbf{v}_1 \approx \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ('aantrekrichting').

Net zo bij zadelpunt $(0,0)$: E.v. bij $\lambda_1 \approx \frac{3}{2}$: $\mathbf{v}_1 \approx \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

E.v. bij $\lambda_1 \approx -\frac{5}{2}$: $\mathbf{v}_1 \approx \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.


2
1
-2
1