Complexe eigenwaarden + eigenvectoren (§ 5.5)

September 19, 2014

Som, product, en nog wat terminologie

- $\mathbb{C} = \{\, x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$.
- Als $z = x + iy$ dan heten $x = \operatorname{Re} z$ en $y = \operatorname{Im} z$, het *reëele* resp. *imaginaire deel* van z.
- som: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;

  product: $(a + bi)(c + di) = ac + ad\, i + (bi)c + bd\, i^2$
  $= (ac - bd) + (bc + ad)i$.

  Deze operaties hebben dezelfde rekenkundige eigenschappen als voor de reëele getallen.

Voorbeeld (beetje akelig wel!)

Los op (in $\mathbb{C}$): $\begin{bmatrix} 2+i & 3 \\ 1-i & -1+2i \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5-3i \\ -4+4i \end{bmatrix}$.

Stug en zorgvuldig doorrekenen geeft het antwoord:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1-i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Complex geconjugeerde en modulus

De (complex) geconjugeerde van $z = x + iy$ is
het complexe getal $\bar{z} = x - iy$.
De modulus van $z = x + iy$ is het (reële) getal $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rekenregels

- $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$.
- $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$ en $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.
- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
- $|zw| = |z| \cdot |w|$ en $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

Het argument θ van $z = a + bi$ ligt (mod. 2π) vast door:
$\cos\theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, en $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Complexe matrices

In § 5.5: vectoren en matrices met complexe elementen.

Rekenen: net zo als met reële matrices.

Voorbeeld

$$\begin{bmatrix} 2+i & 5+2i \\ -1+2i & 4-3i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2-2i & 1+3i \\ 1-4i & 6-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-i & 6+5i \\ 0-2i & 10-4i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2+i & 5+2i \\ 1+2i & 4-3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i \\ 2+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+i)(1-i)+(5+2i)(2+i) \\ (1+2i)(1-i)+(4-3i)(2+i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11+8i \\ 14-i \end{bmatrix}$$

Definitie (Geconjugeerde van een matrix)

Dit gaat simpelweg elementsgewijs:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \dots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \dots & \overline{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{m1}} & \overline{a_{m2}} & \dots & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

Stelling

Of eigenlijk is het meer een rekenregel:

voor een $m \times n$ matrix A en een $n \times p$ matrix B geldt

$$\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}.$$

Complexe eigenwaarden en eigenvectoren

Dit gaat geheel analoog aan het reële geval:

Definitie

Matrix A heeft een eigenwaarde $\lambda\ (\in \mathbb{C})$ als
er een vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ bestaat zodat $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Zo'n vector $\mathbf{v}$ heet dan een eigenvector van A bij de eigenwaarde λ.

Uiteraard mag nu ook $\mathbf{v}$ complex zijn.

Opnieuw:

Stelling

λ is een eigenwaarde van A precies dan als $\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0$.

kort.

$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ is equivalent met $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Dit stelsel heeft alleen een opl. $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ als $\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0$. $\square$

Stelling

Voor *reële* matrices A geldt:

Als $\lambda = a + bi$ een *niet-reële eigenwaarde* is van A, dan is $\overline{\lambda} = a - bi$ ook een eigenwaarde van A.

Proof.

Stel $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$; dan $A\,\overline{\mathbf{v}} \stackrel{!!}{=} \overline{A}\,\overline{\mathbf{v}} = \overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{v}}$. $\square$

Voorbeeld

Bereken de (evt. complexe) eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)+2 = \lambda^2-8\lambda+17.$$

Dit gelijkstellen aan 0:

$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = (\lambda - \ldots)^2 + \ldots = (\lambda - 4)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \pm i.$

Eigenvector bij $\lambda = 4 - i$:

$$[A-(4-i)I \,|\, 0] = \left[\begin{array}{cc|c} 1+i & -2 & 0 \\ \boxed{1} & -1+i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1+i & 0 \end{array}\right]$$

want $-2-(1+i)(-1+i) = -2-(-2+0i) = 0$.

Een eigenvector is dan: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Voorbeeld (vervolg)

Gevonden: de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden $\lambda_{1,2} = 4 \pm i$,

en $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ is een eigenvector bij $\lambda_1 = 4 - i$:

Een eigenvector bij $\lambda_2 = 4 + i$: neem de geconjugeerde van $\mathbf{v}_1$: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Check: $A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5i \\ 4+i \end{bmatrix}$

en $\lambda_2\mathbf{v}_2 = (4+i)\begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5i \\ 4+i \end{bmatrix}$. Is oké.