Diagonaliseerbaarheid (§ 5.3)

September 19, 2014

Definitie

Twee matrices A en B heten gelijkvormig (Eng.: similar),

notatie $A \sim B$ als

er een matrix P bestaat zodat $B = PAP^{-1}$.

Opmerking

Als $B = PAP^{-1}$, dan $P^{-1}BP = A$,

dus $A = P^{-1}BP = P^{-1}B(P^{-1})^{-1}$.

Dus: gelijkvormigheid 'werkt twee kanten op'.

Opmerking

In § 5.4 zien we een meetkundige betekenis van gelijkvormigheid:

A en B zijn gelijkvormig als het matrices zijn bij *dezelfde* afbeelding ten opzichte van *verschillende* bases.

Stelling

Gelijkvormige matrices hebben dezelfde eigenwaarden.

Bewijs gelijkvormige matrices hebben hetzelfde karakteristieke polynoom:

Stel $B = PAP^{-1}$, dan

$$
\begin{aligned}
\det(B - \lambda I) &= \det(PAP^{-1} - \lambda I) \\
&= \det(PAP^{-1} - \lambda PIP^{-1}) \quad (\text{de truc!}) \\
&= \det(P(A - \lambda I)P^{-1}) \\
&= \det(P)\det(A - \lambda I)\det(P^{-1}) \\
&\qquad \text{want } \det(AB) = \det(A)\det(B) \\
&= \det(P)\,\det(A - \lambda I)\,\frac{1}{\det(P)} \\
&= \det(A - \lambda I)
\end{aligned}
$$

Gelijkvormige matrices hebben niet dezelfde eigenvectoren, maar

Stelling

Als $B = PAP^{-1}$ en $\mathbf{v}$ is een eigenvector van A bij eigenwaarde μ,

dan is $P\mathbf{v}$ een eigenvector van B bij eigenwaarde μ

Bewijs Bijna te simpel om waar te zijn!

Stel $A\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$, en $\mathbf{v} \neq 0$. Dan

$$B(P\mathbf{v}) = PAP^{-1}P\mathbf{v} = PA\mathbf{v} = P(\mu\mathbf{v}) = \mu P\mathbf{v}.$$

Bovendien: $P\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, omdat P inverteerbaar is.

Definitie

Een matrix A heet diagonaliseerbaar als A gelijkvormig is met een diagonaalmatrix.

Dus als A te schrijven is als PDP^{-1} met D een diagonaalmatrix.

Nut Als $A = PDP^{-1}$, dan kun je snel machten van A berekenen:

$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PDP^{-1}PDP^{-1} = PDIDP^{-1} = PD^2P^{-1}$.

$A^3 = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^3P^{-1}$,

en algemeen: $A^k = PD^kP^{-1}$.

Merk op: de k-de macht van een diagonaalmatrix vergt slechts de k-de machten van de diagonaalelementen!

Merk op: een diagonaalmatrix $\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$ heeft

eigenwaarden $\;d_1, d_2, \dots, d_n$

met bijbehorende eigenvectoren $\;\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \dots,\ \mathbf{e}_n$.

Dus als $A = PDP^{-1}$, met $P = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]$,

dan heeft A de eigenwaarden $\;d_1, d_2, \dots, d_n$

met bijbehorende eigenvectoren $\;\mathbf{p}_1\,(= P\,\mathbf{e}_1\,!\,),\ \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$.

Deze vormen een basis voor de $\mathbb{R}^n$. Dit leidt tot de

Stelling

Matrix A is diagonaliseerbaar precies dan als A een basis (voor $\mathbb{R}^n$) van eigenvectoren heeft.

Stelling

Matrix A is diagonaliseerbaar precies dan als A een basis (voor $\mathbb{R}^n$) van eigenvectoren heeft.

Opmerking

Uit de afleiding van deze stelling valt af te lezen:

als $\quad A = PDP^{-1}$, dan geldt

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \text{met } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ de e.w.}^n \text{ van } A$$

en

$$P = [\,\mathbf{p}_1 \;\; \mathbf{p}_2 \;\; \dots \;\; \mathbf{p}_n\,], \quad \text{met de } \mathbf{p}_i \text{ bijbehorende (onafh.) e.v.}^n$$

Alternatief bewijs

Stelling

Matrix A is diagonaliseerbaar precies dan als A een basis (voor $\mathbb{R}^n$) van eigenvectoren heeft.

Proof.

Stel $A = PDP^{-1}$ voor een (uiteraard!) inverteerbare matrix $P = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n]$ en een diagonaalmatrix D (met diagonaalelementen $d_1, \ldots, d_n$).

$$\begin{aligned}
A = PDP^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad AP = PD \\
&\Leftrightarrow \quad A[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n] = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n]D \\
&\Leftrightarrow \quad [A\mathbf{p}_1, A\mathbf{p}_2, \ldots, A\mathbf{p}_n] = [d_1\mathbf{p}_1, d_2\mathbf{p}_2, \ldots, d_n\mathbf{p}_n] \\
&\Leftrightarrow \quad \text{er zijn } n \ \underline{\textit{onafh.}} \text{ vectoren } \mathbf{p}_i \text{ met } A\mathbf{p}_i = d_i\mathbf{p}_i.
\end{aligned}$$

□

In §5.2 gedefinieerd: algebraïsche multipliciteit van een eigenwaarde:

= de multipliciteit als nulpunt van het karakteristieke polynoom.

Definitie

De meetkundige multipliciteit van een eigenwaarde λ is de dimensie van de bijbehorende eigenruimte E_λ.
Ter herinnering: $E_\lambda = \mathrm{Nul}(A - \lambda I)$.

Stelling

Voor elke eigenwaarde λ geldt:

meetkundige multipliciteit van λ $\leq$ algebraïsche mult. van λ.

Voorbeeld bij: meetk. mult. $\leq$ alg. mult.

Voorbeeld

De matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarden $\lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_3 = 4,\ \lambda_4 = 6.$

De algebraïsche multipliciteiten zijn 2, 1 resp. 1.
De meetkundige multipliciteiten: m_1, 1 resp. 1, met $m_1 = 1$ of 2.

Berekening van meetkundige multipliciteit van eigenwaarde $\lambda = 2$:
hoeveel (onafh.) eigenvectoren zijn er?

$$[\,A - 2I \mid \mathbf{0}\,] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Er zijn 3 pivots, er is 1 vrije variabele, dus er is **1** onafhankelijke eigenvector, dus $m_1 = 1$.

Karakterisering van diagonaliseerbaarheid

Stelling

Een $n \times n$ matrix A is diagonaliseerbaar precies dan als

1. A te schrijven is als PDP^{-1} (anders gezegd A is gelijkvormig met een diagonaalmatrix)
2. er n *onafhankelijke* eigenvectoren $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ voor A bestaan.
3. het karakteristieke polynoom $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ allemaal *reëele* nulpunten heeft, **en**
   voor elk daarvan de meetkundige multipliciteit *gelijk is aan* de algebraïsche multipliciteit.

M.a.w. $\mathbf{1} \iff \mathbf{2} \iff \mathbf{3}$

Bijzondere gevallen wel/niet diagonaliseerbaar

Stelling

1. Een $(n \times n)$ matrix A met n *verschillende reële* eigenwaarden is diagonaliseerbaar.
2. Een $(n \times n)$ matrix A met minstens een *niet-reële* eigenwaarde is niet diagonaliseerbaar.

(WAAR of ONWAAR?)

1. Elke diagonaliseerbare matrix is inverteerbaar.
2. Elke inverteerbare matrix is diagonaliseerbaar.
3. Als de matrix A diagonaliseerbaar is, dan is A^T eveneens diagonaliseerbaar.

Nog twee voorbeelden

Voorbeeld (Lay, § 5.3, 12 en 14)

12 Gegeven is dat de matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (alleen) de eigenwaarden 2 en 8 heeft.

Ga na of A diagonaliseerbaar is.

14 Gegeven is dat de matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ de eigenwaarden 5 en 4 heeft.

Weer de vraag: is A diagonaliseerbaar?

Stelling (Cayley-Hamilton WOWW!)

Stel $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \ldots + c_n\lambda^n$
is het karakteristieke polynoom van A.

Dan geldt: $c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \ldots + c_{n-1}A^{n-1} + c_n A^n = 0$
(= de nulmatrix).

Met andere woorden: **Elke matrix is een 'nulpunt' van zijn karakteristieke polynoom.**

Voorbeeld

Voor $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
is $\det(A - \lambda I) = p_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4.$

Check: $A^2 - 3A - 4I = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Stelling (Cayley-Hamilton)

Elke matrix is een 'nulpunt' van zijn karakteristieke polynoom.

Bewijs (gedeeltelijk).

Als A een diagonaalmatrix is, dan is het eenvoudig in te zien.

Voorbeeld: $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ heeft e.w.^{n} 4, 3 en 1.

$$\begin{bmatrix} 4-4 & 0 & 0 \\ 0 & 3-4 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4-3 & 0 & 0 \\ 0 & 3-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4-1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} = \ldots$$

Dan is het een kleine stap naar het geval van *diagonaliseerbare* matrices.

Het basis-idee

$$c_0 I + c_1 PDP^{-1} + c_2 (PDP^{-1})^2 + \ldots + c_{n-1}(PDP^{-1})^{n-1} + c_n (PDP^{-1})^n$$
$$= P\big(c_0 I + c_1 D + c_2 D^2 + \ldots + c_{n-1} D^{n-1} + c_n D^n\big) P^{-1}$$

Het algemene geval voert iets te ver. □