De karakteristieke vergelijking (§ 5.2)

λ is een eigenwaarde van A als $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ voor een vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = A\mathbf{v} - \lambda I\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A - \lambda \mathrm{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Opdat dit stelsel niet-triviale oplossingen heeft: $\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0$!

Voorbeeld

Voor $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$: $\mathrm{Det}(A - \lambda \mathrm{I}) =$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(4-\lambda) - 2\cdot 1 = \lambda^2 - 9\lambda + 18 = (\lambda-3)(\lambda-6)$$

Conclusie: A heeft de eigenwaarden $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$.

In het algemeen: voor een $n \times n$ matrix A, $\mathrm{Det}(A - \lambda I)$ is een n-de graads polynoom.

Definitie

$\mathrm{Det}(A - \lambda I)$ heet het karakteristieke polynoom van A

Opmerking

Op vorige slide afgeleid: de **nulpunten** van het karakteristieke polynoom zijn precies de **eigenwaarden** van A.

Opmerking

Opnieuw te zien: een $n \times n$ matrix A heeft hoogstens n verschillende eigenwaarden.

Namelijk: een n-de graads polynoom heeft hoogstens n nulpunten.

Voorbeelden

Voorbeeld

Het karakteristieke polynoom van $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Als volgt:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 \begin{aligned}[t] &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 4) \end{aligned}$$

De eigenwaarden van A: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$.

Voorbeeld

Het karakteristieke polynoom van $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 5 \\ 0 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)(6-\lambda)$$

De eigenwaarden van A: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 6$.

Opmerking

Dit gaat natuurlijk analoog voor een willekeurige boven- of onderdriehoeksmatrix.

Stelling

Bij een boven- of onderdriehoeksmatrix A zijn de eigenwaarden precies de diagonaalelementen.

Voorbeeld

Bereken de eigenwaarden van de matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\text{Det}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & -3 & -1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Eerste stap: ontwikkel naar tweede rij:

$$\text{Det}(A - \lambda I) = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \ldots = (1 - \lambda)^3.$$

A heeft (drievoudige) eigenwaarde $\lambda = 1$.

Definitie

Als λ een k-voudig nulpunt is van de karakteristieke vergelijking, dan heet k de algebraïsche multipliciteit van λ.

Definitie

Als λ een k-voudig nulpunt is van de karakteristieke vergelijking, dan heet k de algebraïsche multipliciteit van λ.

Definitie (meetkundige multipliciteit)

Als λ eigenwaarde is van de matrix A, dan is de meetkundige multipliciteit van λ gedefinieerd als de dimensie van de eigenruimte E_λ.

Opgave

De matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ heeft eigenwaarde $\lambda = 1$.

Bereken de meetkundige multipliciteit van λ.

Opgave

Bereken een basis voor de eigenruimte bij $\lambda = 1$ van

de matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Opgave

(Tevens een oefening in determinanten).

Bereken de eigenwaarden van de matrix $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Geef ook de algebraïsche multipliciteiten.

Antwoord: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 1$, elk met multipliciteit 1.

Opgave

WAAR of ONWAAR:

1. A en A^T hebben dezelfde eigenwaarden.
2. A en A^T hebben dezelfde eigenvectoren.
3. $\det(AB) = \det(BA)$.
4. AB en BA hebben hetzelfde karakteristieke polynoom.

Drie coëfficiënten van het karakteristieke polynoom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Uitgeschreven tot

$$p_A(\lambda) = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0 \quad \text{geldt er}$$

Stelling

$$c_n = (-1)^n, \quad c_0 = \det(A), \quad c_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})$$

Definitie

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$ heet het spoor van A. (Eng.: trace)

Voorbeeld

Het karakteristieke polynoom van $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ is al gevonden:

$p_A(\lambda) = c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = \lambda^2 - 5\lambda + 4.$

Inderdaad: $\det(A) = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 4 = c_0$

en $(-1)^{2-1}\,\mathrm{tr}(A) = -(2+3) = -5 = c_1.$

Stelling

Elk n-de graads polynoom $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ met coëfficiënten in $\mathbb{C}$ (de complexe getallen) heeft n nulpunten in $\mathbb{C}$.

Opmerking

De nulpunten kunnen samenvallen.
Bijv. $p(z) = (z-1)^2(z+i)^3$ heeft drievoudig nulpunt $z = -i$.

Stelling

Elk n-de graads polynoom (in $\mathbb{C}$) is volledig te ontbinden in lineaire factoren.

Dit is een gevolg van de eerste stelling: 'stapsgewijs uitdelen'.

Voorbeeld

$p(z) = z^2 - 5z + 6$ heeft nulpunten $z_1 = 2,\ z_2 = 3.$

Er geldt: $p(z) = (z-2)(z-3).$

$p(z) = z^4 - 1$ heeft nulpunten $1,\ -1,\ i,\ -i.$

Ontbinding:

$$\begin{aligned} p(z) = (z^2-1)(z^2+1) &= (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) \\ &= (z-1)(z-(-1))(z-i)(z-(-i)). \end{aligned}$$

Eigenschap van som en product van de eigenwaarden

Het karakteristieke polynoom van een $n \times n$ matrix A heeft n nulpunten (mogelijk samenvallend) in $\mathbb{C}$. De nulpunten zijn de (mogelijk complexe) eigenwaarden van A. Er geldt

Stelling

— $\sum$ eigenwaarden $= \mathrm{tr}(A)$;

— $\prod$ eigenwaarden $= \det(A)$. ($\prod$ staat voor 'product')

N.B. Dit gaat over **alle** nulpunten van $p_A(\lambda)$

(Dus ook de complexe!)

Voorbeeld

Opgave 5.1.19: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Reeds gezien: A heeft eigenwaarden 0, 0 en 6.

— $\sum$ eigenwaarden $= 0 + 0 + 6 = 6 = 1 + 2 + 3 = \mathrm{tr}(A)$.

— $\prod$ eigenwaarden $= 0 \cdot 0 \cdot 6 = 0 = \mathrm{Det}(A)$.

Stelling

Voor elke $n \times n$ matrix:

— $\sum$ eigenwaarden $= \mathrm{tr}(A) = \sum$ diagonaalelementen van A;

— $\prod$ eigenwaarden $= \det(A)$.

Bewijs Voor de formule van het product

Noteer $p_A(\lambda) = \mathrm{Det}(A - \lambda I)$, het karakteristieke polynoom.

Als $z_1, z_2, \dots, z_n$ de nulpunten zijn van p_A,
dus de eigenwaarden van A, dan geldt

$p_A(\lambda) = (z_1 - \lambda)(z_2 - \lambda) \cdots (z_n - \lambda)$.

Dan geldt zowel $p_A(0) = z_1 z_2 \cdots z_n$

als ook $p_A(0) = \det(A - 0I) = \det(A)$.