Eigenwaarden + eigenvectoren (§ 5.1)

September 19, 2014

Definitie van eigenwaarde en eigenvector

Definitie

Een *vierkante* matrix A heeft een eigenwaarde λ als er een vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ bestaat zodat $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.
Zo'n vector $\mathbf{v}$ heet dan een eigenvector van A bij de eigenwaarde λ.

Opmerking

$\mathbf{0}$ wordt dus per definitie nooit gezien als een eigenvector.

Voorbeeld

Ga na of $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ een eigenvector is van de matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Als volgt: $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix} \neq c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

dus: $\mathbf{v}$ is geen eigenvector van A.

Voorbeeld

Idem voor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ en $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Nu: $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = (\mathbf{-2}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,

dus: $\mathbf{v}$ is een eigenvector van A bij eigenwaarde -2.

Voorbeeld

Ga na of $\lambda = 2$ een eigenwaarde is van de matrix $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Na te gaan: is er een $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ waarvoor $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$?

Herleiden op nul:
$A\mathbf{x} = 2\mathbf{x} \Leftrightarrow A\mathbf{x} - 2\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow A\mathbf{x} - 2\,I\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A - 2\,I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Oplossen via aangevulde matrix:

$$\left[\begin{array}{c|c} A - 2\,I & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -2-2 & 2 & 0 \\ 4 & 3-2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Er zijn twee pivots; het stelsel heeft alleen de triviale oplossing $\mathbf{0}$.

Conclusie: 2 is niet een eigenwaarde van A.

Hoe na te gaan of c (of $\mathbf{v}$) een eigenwaarde (-vector) is

De methode van de voorbeelden werkt algemeen:

- Vraag: is een gegeven vector $\mathbf{v}$ een eigenvector van A?

  Antwoord: simpelweg checken of $A\mathbf{v}$ een veelvoud is van $\mathbf{v}$.

- Vraag: is een gegeven getal λ een eigenwaarde van A?

  Antwoord: via $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$

  Aldus: checken of het stelsel met aangevulde matrix $\left[\begin{array}{c|c} A - \lambda\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array}\right]$ een niet-triviale oplossing heeft.

Voorbeelden

1. Ga na of $\lambda = 5$ en $\lambda = 6$ eigenwaarden zijn van de matrix
$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Kun je in één oogopslag zien wat de eigenwaarden zijn van
de matrix $\quad U = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 & 7 \\ 0 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$?

Meetkundige betekenis van eigenwaarden/-vectoren

Bij $n \times n$ matrix A: afbeelding $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ via $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Een eigenvector is een vector ($\neq \mathbf{0}$) die door T op een veelvoud van zichzelf wordt afgebeeld.

Voorbeeld

(a) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de spiegeling in de lijn $y = x$.

Bepaal alle eigenwaarden en -vectoren van S. Check dat dit ook eigenwaarden/-vectoren zijn van de matrix A bij S.

(b) Zelfde vragen voor de projectie van de $\mathbb{R}^3$ op het x_1-x_2-vlak.

(c) Kun je een 2×2 matrix verzinnen die geen eigenwaarden heeft?

Opmerking

Merk op: bij **(a)** en **(b)** vormen de eigenvectoren bij één eigenwaarde (als je $\mathbf{0}$ erbij neemt) een deelruimte.

Stellingen over eigenwaarden/-vectoren

Stelling

De oplossingen van de vergelijking $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ vormen een deelruimte.

Voor een eigenwaarde λ van A heet dit de eigenruimte (van A bij λ). Notatie: E_λ.

Bewijs

Uit $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow (A - \lambda\mathrm{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ volgt $E_\lambda = \mathrm{Nul}(A - \lambda\mathrm{I})$.

(De nulruimte van een ($n \times n$) matrix is een deelruimte (van $\mathbb{R}^n$); Lay § 2.8.)

Stelling

Eigenvectoren bij *verschillende* eigenwaarden zijn onafhankelijk.

Bewijs (met volledige inductie; zie Lay).

Stelling

Een $n \times n$ matrix A heeft *hoogstens* n verschillende eigenwaarden.

Bewijs Dit is een direct gevolg van de voorgaande stelling. (Want in de $\mathbb{R}^n$ kun je hoogstens n onafhankelijke vectoren hebben.)

Stelling

Een matrix A heeft eigenwaarde 0 als en slechts als de kolommen van A afhankelijk zijn.

Bewijs $\lambda = 0$ is een eigenwaarde als er een vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ is waarvoor $A\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Zo'n $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ bestaat precies dan als de kolommen van A afhankelijk zijn.

Stelling

Een matrix A is inverteerbaar precies dan als 0 *niet* een eigenwaarde van A is.

Bewijs Dit is een herformulering van de vorige stelling.

Voorbeeld

Opgave 5.1.19 Bereken zoveel mogelijk eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

A is evident <u>niet</u> inverteerbaar, dus A heeft eigenwaarde 0.

Merk op: $A\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Welke andere eigenvectoren zijn er mogelijk?